

Леммы о воробьях

Первая лемма о воробьях. Дан неравнобедренный треугольник ABC . На лучах BA и CA выбраны точки C_0 и B_0 соответственно, точка A_1 — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC . Равенство $BC_0 = CB_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки B_0 , C_0 , A_1 и A лежат на одной окружности.

Вторая лемма о воробьях. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_0 и B_0 соответственно, точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника AB_0C_0 , проходит через I тогда и только тогда, когда $BC_0 + CB_0 = BC$.

1. Пусть на сторонах BA и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, а точки M и M_0 — середины отрезков AC и A_0C_0 . Докажите, что если $AC_0 = CA_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе $\angle ABC$.
2. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D . Точки E и F симметричны точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0 , где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.
3. Пусть A_0 , B_0 и C_0 — точки касания внеписанных окружностей со сторонами BC , CA и AB треугольника ABC . Окружности (A_0B_0C) , (AB_0C_0) и (A_0BC_0) пересекают второй раз окружность (ABC) в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.
4. Точки A_1 , B_1 и C_1 выбраны на сторонах BC , CA и AB треугольника ABC так, что

$$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1.$$

Пусть I_a и O_a , I_b и O_b , I_c и O_c — центры вписанной и описанной окружностей треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C соответственно.

(а) Докажите, что центр окружности $(I_aI_bI_c)$ совпадает с I .

(б) Докажите, что центр вписанной окружности треугольника $O_aO_bO_c$ совпадает с I .

5. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны BC , а A_1 — середина дуги BAC описанной окружности. Докажите, что угол между IM и BC равен углу между IA_1 и AA_1 .
6. На стороне BC треугольника ABC выбрана произвольная точка D . Обозначим через I_b и I_c центры вписанных в треугольники ABD и ACD окружностей, а через A_1 — точку касания вписанной окружности со стороной BC . Докажите, что $\angle I_bA_1I_c = 90^\circ$.