

Выпуклость

Фигура называется *выпуклой*, если для любых двух её точек отрезок, соединяющий эти точки, целиком принадлежит фигуре.

1. Докажите, что пересечению любого количества выпуклых фигур выпукло.

Выпуклой оболочкой произвольного множества точек на плоскости называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное. Из задачи 1 следует, что выпуклая оболочка действительно является выпуклым множеством.

2. На плоскости отмечено (а) 20 точек (б) 18 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что 3 из отмеченных точек можно обозначить через A , B и C так, чтобы было верно $\angle ABC \leq 10^\circ$.
3. Один (а) треугольник (б) выпуклый многоугольник расположен внутри другого. Докажите, что периметр первого многоугольника не превосходит периметра второго.
4. Дано 5 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что 4 из них образуют выпуклый многоугольник.
5. Даны n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое минимальное число попарно непараллельных прямых может быть среди них?
6. На плоскости даны $3n - 1$ точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать $2n$ из этих точек так, чтобы их выпуклая оболочка не была треугольником.
7. В выпуклом многоугольнике из каждой вершины опущены перпендикуляры на все не смежные с ней стороны. Может ли оказаться так, что основание каждого перпендикуляра попало на продолжение стороны, а не на саму сторону?