

Поворотная гомотетия

Определение. Поворотной гомотетией с коэффициентом k ($k > 0$) и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ , имеющих общий центр.

1. (а) Прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке X . Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая отрезок AB в $A'B'$, причём центром этой гомотетии является вторая точка пересечения окружностей $(AA'X)$ и $(BB'X)$.
(б) По двум прямым, пересекающимся в точке O , с постоянными (но, возможно, неодинаковыми) скоростями движутся точки A и B , причём в точке O они оказываются в разные моменты времени. Докажите, что описанные окружности треугольников OAB проходят через фиксированную точку, отличную от O .
2. (а) Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в $A'B'$, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA' в BB' .
(б) **Точка Микеля.** Четыре прямые общего положения в пересечении образуют четыре треугольника. Докажите, что их описанные окружности пересекаются в одной точке.
(в) Докажите, что центры описанных окружностей из пункта 2б) лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.
3. На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$; CE — высота треугольника ABC . Докажите, что $\angle LEM = 90^\circ$.
4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Точки I и J — центры вписанных окружностей треугольников A_1BC_1 и A_1CB_1 соответственно. Докажите, что точки B , I , J , C лежат на одной окружности.
5. Точки M и N лежат на сторонах AB и BC квадрата $ABCD$, причём $MB = BN$; H — основание высоты, опущенной из точки B на отрезок MC . Докажите, что $\angle NHD = 90^\circ$.
6. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ повернули относительно их середин на 90° против часовой стрелки, получились отрезки A_0B_0 и C_0D_0 . Докажите, что $B_0C_0 = A_0D_0$.
7. Пусть $ABCDE$ — такой выпуклый пятиугольник, что

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \text{ и } \angle CBA = \angle DCA = \angle EDA.$$

Диагонали BD и CE пересекаются в точке P . Докажите, что прямая AP делит отрезок CD пополам.