

Вспомогательные утверждения и многоходовочки

В задачах по ~~математике~~ геометрии часто бывают спрятаны полезные вспомогательные утверждения: подобные треугольники, вписанные четырёхугольники, три точки на одной прямой, промежуточные оценки (в геометрических неравенствах) и т.д. и т.п.

1. (*Типичный пример*) На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E , отличная от точек A и C , а на прямых AB и BC точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN . Докажите, что точки K , E и D лежат на одной прямой.

Решение. Треугольники ... и ... равны по СУС. Тогда четырёхугольник ... — вписанный. Треугольники ... и ... — подобные равнобедренные. Тогда $\angle??? + \angle??? = 180^\circ$ и четырёхугольник ... — вписанный. Но тогда обе точки ? и ? лежат на биссектрисе угла $\angle???$, ч.т.д.

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в различных точках A и B . Точки X на ω_1 и Y на ω_2 выбираются так, что AB делит угол XAY пополам. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников AXY , лежат на фиксированной прямой.

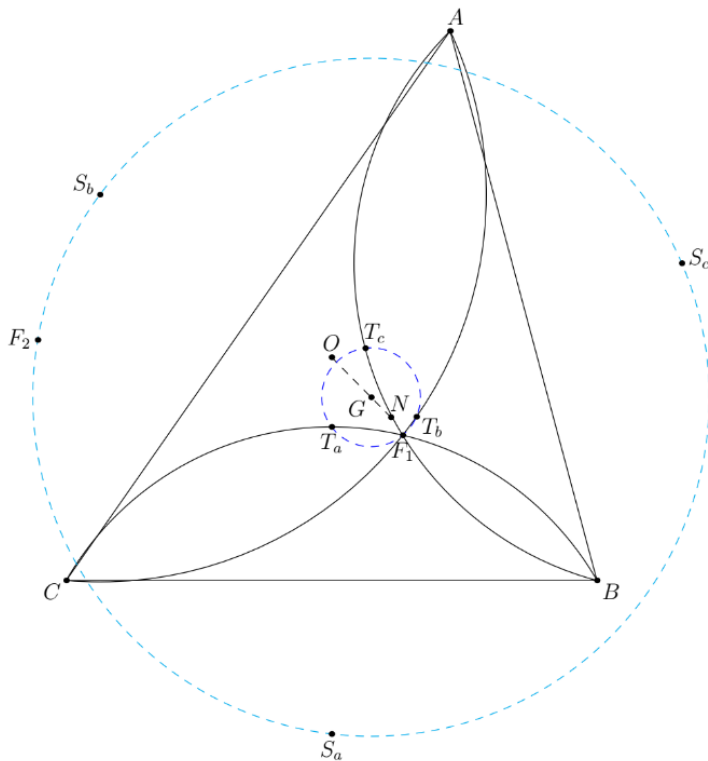
Указание. Решите $n > 1$ способами.

3. В треугольнике ABC отмечен центр вписанной окружности I . Биссектриса AI пересекает BC в точке D . Точки E и F на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $CD = CE$ и $BF = BD$. Пусть $(CEI) \cap (DFI) = P \neq I$ и $(BFI) \cap (DEI) = Q \neq I$. Докажите, что $PQ \perp BC$.
4. В остроугольном треугольнике ABC отмечены инцентр I и середина N дуги BAC описанной окружности. Прямая AN пересекает прямую BC в точке L . На отрезке AI нашлась такая точка X , что $\angle XNI = \angle ILA$. Прямая NX повторно пересекает прямую BC в точке Y . Докажите, что точка X — середина NY .

Соображения в помощь. Начнём анализировать задачу с конца. Как можно показать, что $NX = XY$? Единственное связанное соображение на картинке — равенство $\angle XAN = 90^\circ$. Попробуем опустить перпендикуляр YN на AN . Тогда на картинке должна появиться окружность, построенная на AY как на диаметре (проходящая заодно через середину BC). Но равенство углов из условия намекает на то, что окружность LTN касается IN , где $T = LI \cap NT$. Если же задача верна, то $IN = IN$ и из степени точки I относительно (LTN) получается (как?), что $NITH$ должен быть вписанным! Но из нашего определения точки H вывести это напрямую не получается...

В решении также могут пригодиться радикальные оси и/или лемма о трезубце.

5. (Lester, 1996) В разностороннем треугольнике две точки Торричелли, центр описанной окружности и центр окружности Эйлера лежат на одной окружности.
- (а) (*Fermat points/точки Торричелли*) Равносторонние треугольники Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 построены на сторонах BC , CA и AB соответственно во внешнюю сторону, а равносторонние треугольники δ_1 , δ_2 , δ_3 — на тех же сторонах, но во внутреннюю сторону. Докажите, что описанные окружности этих двух троек треугольников пересекаются в точках F_1 и F_2 соответственно.
- (б) Пусть S_a, S_b, S_c — центры описанных окружностей треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, а T_a, T_b, T_c — центры описанных окружностей треугольников $\delta_a, \delta_b, \delta_c$. Докажите, что $S_a S_b S_c$ и $T_a T_b T_c$ — равносторонние треугольники с общим центром в точке G пересечения медиан треугольника ABC .
- (в) Докажите, что четырёхугольники $S_a S_b S_c F_2$ и $T_a T_b T_c F_1$ — вписанные.
- (г) (*Ключевая лемма*) В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) точка P симметрична B относительно AC , а точка Q симметрична C относительно AB . Касательная к описанной окружности треугольника APQ , проведённая в точке A , пересекает прямую PQ в точке T . Докажите, что точка, симметричная T относительно A , лежит на BC .
- (д) Применяя ключевую лемму 3 раза, докажите, что описанная окружность треугольника $GF_1 F_2$ касается прямой Эйлера треугольника ABC .
- (е) Завершите доказательство теоремы¹.



¹ Данное рассуждение принадлежит Н. И. Белухову.