Теорема Шпернера

Теорема Шпернера. В n-элементном множестве выбрано несколько подмножеств так, что ни одно из них не содержится ни в каком другом. Тогда этих подмножеств не более $C_n^{[n/2]}$.

1. В множестве из n элементов отметили несколько подмножеств так, что никакое отмеченное подмножество не содержится ни в одном другом отмеченном.

(а) Докажите, что можно отметить $C_n^{[n/2]}$ подмножеств;

(б) При помощи леммы Холла докажите, что можно заменить все множества на $[n/2]$-элементные, и выведите отсюда теорему Шпернера.

2. **(а)** Рассмотрим все возможные цепочки множеств $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = \{1, 2, \dots n\}$. В скольких цепочках содержится k-элементное множество?

(б) **Неравенство ЛЯМ**. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k$ — подмножества n-элементного множества, ни одно из которых не содержится в другом. Тогда $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{C_n^{|Ai|}} \leqslant 1$;

(в) С помощью неравенства ЛЯМ докажите теорему Шпернера.

3. Детектив расследует преступление. В деле замешаны 100 человек, среди которых один — преступник, а один — свидетель. Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 100 человек, и если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. За какое наименьшее число дней детектив заведомо сможет раскрыть дело?

4. Пусть среди отмеченных подмножеств n-элементного множества нет вложенной цепочки из k элементов. Какое наибольшее количество подмножеств может быть отмечено в этом случае?

5. На математической олимпиаде Средиземья было предложено 10 задач. Оказалось, что любые два гнома решили разные наборы задач, причем обязательно нашлась задача, решённая первым из них и не решённая вторым, и задача, решённая вторым из них и не решённая первым. Какое наибольшее количество верных решений могло прочитать жюри олимпиады?

6. В школе преподаётся n предметов. Оказалось, что любые два школьника имеют только оценки 5 и 2, причем имеют разные наборы оценок. Также оказалось, что нет школьника, который учится лучше, чем два других ученика и нет школьника, который учится хуже, чем два других ученика. (Мы считаем, что один ученик лучше другого, если по любому предмету у него оценка не хуже, а по какому-нибудь предмету оценка лучше). Докажите, что в школе не больше $2C_{n-1}^{[n/2]}$ учеников.

7. В множестве из n элементов отметили несколько подмножеств так, что никакое отмеченное подмножество не содержится ни в одном другом отмеченном, причём любые два отмеченные подмножества пересекаются и никакие два подмножества не дают в объединении все множество. Какое наибольшее количество подмножеств может быть отмечено, если **(а)** n чётное; **(б)** n нечётное?