Разнобой по ТЧ

Памятка по теории.

- **«Классика»**

$$\text{НОД}(a,p)=1,\ p\ -\ \text{простое} \Longrightarrow a^{p-1}\equiv 1 \pmod p\ (\textit{Малая теорема Ферма})$$
$$\text{НОД}(a,n)=1 \Longrightarrow a^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod n\ (\textit{теорема Эйлера})$$
$$p\ -\ \text{простое} \Longrightarrow (p-1)!\equiv -1 \pmod p\ (\textit{теорема Вильсона})$$

- **НОД и алгоритм Евклида**

  $\text{НОД}(a,b)=d \Longrightarrow a=da', b=db'$, причём $\text{НОД}(a',b')=1$.

  $\text{НОД}(a,b)=d \Longrightarrow \exists\, x,y\in\mathbb{Z}\colon ax+by=d$ (*линейное представление НОД*)

- **Китайская теорема об остатках**

  Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно взаимно простые числа, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольный набор остатков по соответствующим модулям. Тогда существует единственный остаток A по модулю $m_1 m_2 \ldots m_n$, для которого выполнены сравнения $A\equiv a_i \pmod{m_i}$, $i=1,2\ldots,n$.

- **Разложение на простые множители**

$$\text{«Пусть } n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}\text{, тогда }\ldots\text{»}$$

  Если $\nu_p(n)$ — степень вхождения простого числа p в число n, то для любых целых a и b

$$\nu_p(ab)=\nu_p(a)+\nu_p(b),\ \nu_p(a+b)\geq \min\bigl\{\nu_p(a),\nu_p(b)\bigr\},$$

  причём если $\nu_p(a)\neq\nu_p(b)$, то $\nu_p(a+b)=\min\bigl\{\nu_p(a),\nu_p(b)\bigr\}$.

  Натуральное число a является точной k-й ($k>1$) степенью другого натурального числа тогда и только тогда, когда $k\,|\,\nu_p(a)$ для любого простого числа p.

- **Алгебраические идеи**

  Разложение алгебраического выражения на множители, формулы сокращённого умножения.

- **Общематематические идеи**.

  Принцип крайнего, индукция, подсчёт двумя способами, упорядочивание.

1. Найдите все пары натуральных чисел m и n ($m < n$), для которых оба числа $m! + n$ и $n! + m$ являются степенями пятёрки.

2. Даны два натуральных числа m и n. Известно, что сумма всех делителей m равна сумме всех делителей n (в сумму делителей входят 1 и само число) и сумма чисел, обратных к делителям m, равна сумме чисел, обратных к делителям n. Докажите, что $m = n$.

3. Докажите, что при $n \geq 5$ среди натуральных чисел, меньших $n!$, найдутся n последовательных составных чисел.

4. Для натуральных чисел x и y и простого p нашлись такие взаимно простые натуральные числа m и n, что $x^m \equiv y^n \pmod p$. Докажите, что существует единственный остаток z по модулю p, для которого выполнены сравнения

$$x \equiv z^n \pmod p, \ y \equiv z^m \pmod p.$$

5. Докажите, что для любого простого числа $p > 5$ из набора $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ можно выбрать три различных числа a, b, c так, что

$$a^b \equiv b^c \equiv c^a \pmod p.$$

6. Для различных натуральных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\text{НОД}(ab+1, bc+1, ca+1) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

7. Для натуральных чисел m и n положим $M(m,\, n) = \frac{\text{НОК}(m,n)}{\text{НОД}(m,n)}$. Для каждого натурального $n \geq 2$ определим

$$x_n = M(1,\, M(2,\, M(3,\, \ldots,\, M(n-2,\, M(n-1,\, n))\ldots))).$$

Для некоторого n оказалось, что $x_{n+1} = 5x_n$. Докажите, что $\frac{n+1}{5}$ является квадратом натурального числа.

8. Два различных простых числа p и q отличаются менее чем в два раза. Докажите, что существуют такие два последовательных натуральных числа, что у одного из них наибольший простой делитель равен p, а у второго — q.