

Композиция гомотетий

Теорема. (*О трёх центрах гомотетии*) Если композицией трёх гомотетий является тождественное преобразование плоскости, то их центры лежат на одной прямой.

1. На плоскости зафиксированы две неравные окружности α и β . Произвольная окружность ω касается их внутренним образом в точках A_ω и B_ω соответственно. Докажите, что все прямые $A_\omega B_\omega$ проходят через одну точку, не зависящую от выбора ω .
2. На продолжении стороны CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) за точку D отмечена точка P , точка M — середина AD . Прямые PM и AC пересекаются в точке Q , PB и AD — в точке X , а BQ и AD — в точке Y . Докажите, что M — середина XY .
3. Продолжения сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q . На сторонах четырёхугольника выбрали по точке так, что получился параллелограмм, причем одна пара его сторон параллельна PQ . Докажите, что центр параллелограмма лежит на одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$.
4. Внутри треугольника ABC расположены три непересекающихся круга: ω_A , ω_B , ω_C . Каждый из них касается двух соответственных сторон треугольника. Круг ω касается внешним образом их всех в точках A' , B' , C' соответственно. Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.
5. В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D . Пусть ω_1 и Ω_1 , ω_2 и Ω_2 — соответственно вписанные и невписанные (касающиеся AB) окружности треугольников ACD и BCD . Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2 , Ω_1 и Ω_2 пересекаются на прямой AB .
6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB , DC пересекаются в точке P , а лучи AD , BC — в точке Q . Из точек P и Q внутрь углов APD и AQB проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам B , C , D , можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине A , также можно вписать окружность.
7. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр невписанной окружности треугольника CDA , касающейся стороны AC , лежат на одной прямой.
8. В треугольнике ABC точки D , E и F лежат на сторонах BC , CA и AB соответственно, так что каждый из четырёхугольников $AFDE$, $BDEF$ и $CEFD$ имеет вписанную окружность. Докажите, что радиус вписанной окружности треугольника ABC вдвое больше радиуса вписанной окружности треугольника DEF .