Тренировочная олимпиада

Задача 1. Десятичные цифры натурального числа A образуют возрастающую последовательность (слева направо). Найдите сумму цифр числа $9A$.

Решение. Обозначим $A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0}$. Тогда

$$9A = 10A - A = \overline{(a_n)(a_{n-1} - a_n)(a_{n-2} - a_{n-1}) \ldots (a_0 - a_1 - 1)(10 - a_0)},$$

поэтому сумма цифр числа $9A$ равна 9. $\square$

Задача 2. У Алёны есть строка ЦЦППППММ. За один ход она может сделать одно из следующих действий: заменить ЦП на ПЦ, заменить ПМ на МП или заменить МЦ на ЦМ. Сколько строк может получить Алёна, сделав какое-то (возможно, нулевое) число преобразований по данным правилам?

Решение. Заметим, что расположение букв «П» однозначно задаёт возможное слово. Действительно, поскольку буквы «Ц» в исходной строке стоят левее букв «М», то буквы этих двух видов ни разу не будут меняться местами, а значит их можно единственным образом расставить на оставшихся позициях. С другой стороны, любую из указанных $C_8^4 = 70$ строк Алёна получить может. Достаточно первыми несколькими ходами жадно расставить буквы «П» на необходимые позиции. $\square$

Задача 3. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, а H — ортоцентр. Докажите, что площадь одного из треугольников AOH, BOH и COH равна сумме площадей двух других.

Решение. Рассмотрим гомотетию $\mathcal{H}$ с центром в точке G пересечения медиан треугольника ABC и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Данная гомотетия переводит прямую OH в себя, а точки A, B, C в середины D, E, F сторон BC, CA, AB соответственно. Без ограничения общности предположим, что OH пересекает стороны AB и AC. Расстояние $d(D, OH)$ равно половине расстояния $d(A, OH)$, поскольку OH и D есть образы OH и A соответственно при гомотетии $\mathcal{H}$. Также по свойству средней линии трапеции $d(D, OH) = \frac{d(B,OH)+d(C,OH)}{2}$. Тем самым получаем $d(A, OH) = d(B, OH) + d(C, OH)$, что и требовалось доказать. $\square$

Задача 4. Последовательность вещественных чисел $a_1 = 3$, a_2, $a_3, \ldots$ при $n \geqslant 1$ удовлетворяет соотношению

$$na_{n+1} = 2(n+1)a_n - n - 2.$$

Докажите, что для любого нечётного простого числа p найдётся натуральное число m, для которого $p \mid a_m$ и $p \mid a_{m+1}$.

Решение. Покажем, что $m = p - 2$ подходит.

Заметим, что $n(a_{n+1} - 1) = 2(n+1)(a_n - 1)$. Тогда $\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = 2 \cdot \frac{n+1}{n}$.

Индукцией по n докажем, что $a_n = n \cdot 2^n + 1$ для каждого натурального n. *База*: при $n = 1$ имеем $a_1 = 1 \cdot 2^1 + 1 = 3$. *Переход*: пусть $a_n = n \cdot 2^n + 1$. Тогда из соотношения, полученного выше, $a_{n+1} = n \cdot 2^n \cdot 2\frac{n+1}{n} + 1 = (n+1) \cdot 2^{n+1} + 1$, что и требовалось доказать.

Значит, $a_{p-2} = (p-2)2^{p-2} + 1 = p \cdot 2^{p-2} - (2^{p-1} - 1)$ и $a_{p-1} = (p-1)2^{p-1} + 1 = p \cdot 2^{p-1} - (2^{p-1} - 1)$. Теперь доказываемое утверждение следует из малой теоремы Ферма. $\square$

Задача 5. Маша отметила на доске 100×100 несколько клеток и разрешила королю ходить только по отмеченным клеткам. Затем Маша выбрала две отмеченные клетки и сообщила Лене минимальное число ходов короля от одной до другой. Какое наибольшее число могла услышать Лена?

Решение. Оценка. Разобьём доску на 2500 квадратиков 2×2. Заметим, что в каждом из них король сделает не более 1 хода. Также заметим, что поскольку рассматривается кратчайший путь короля между двумя отмеченными клетками, то король побывает в каждом квадрате 2×2 не более одного раза за весь путь. Таким образом, Лена не могла услышать число, большее $2499 + 2500 = 4999$.

Пример. Пример пути длины $2k^2$ в квадрате $2k \times 2k$ строится так.

Путь в квадрате 2×2 начинается в левой верхней и заканчивается в правой нижней клетке. Если нужный путь в квадрате $(2k-2) \times (2k-2)$ уже построен и заканчивается в правой нижней клетке, добавим каемку ширины 2 вдоль нижней и левой стороны квадрата и продолжим путь одним ходом вниз, одним ходом вниз-влево, а затем по клеткам каемки по часовой стрелке, пропуская левый нижний угол и заканчивая в левом верхнем углу. При добавлении каемки добавилось $(2k)^2 - (2k-2)^2 = 8k - 4$ клетки, из них в проведенный путь попало $4k - 2$. Таким образом, мы получили путь длины $2(k-1)^2 + 4k - 2 = 2k^2$, а если доску повернуть на 180 градусов, он еще и будет снова заканчиваться в правом нижнем углу. Проделав эту операцию, начиная с квадрата 2×2, 49 раз, мы получим пример пути в квадрате 100×100. $\square$