

Диагностическая работа

Задача 1. Десятичные цифры натурального числа A образуют возрастающую последовательность (слева направо). Найдите сумму цифр числа $9A$.

Решение. Обозначим $A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0}$. Тогда

$$9A = 10A - A = \overline{(a_n)(a_{n-1} - a_n)(a_{n-2} - a_{n-1}) \dots (a_0 - a_1 - 1)(10 - a_0)},$$

поэтому сумма цифр числа $9A$ равна 9. □

Задача 2. Пусть O — центр окружности Ω , описанной около треугольника ABC . Окружность Γ проходит через точки O и B и касается прямой AB в точке B . Окружности Γ и Ω пересекаются второй раз в точке P , отличной от B . Окружность, проходящая через точки P и C , касающаяся прямой AC в точке C , повторно пересекает Γ в точке M . Докажите, что $MP = MC$.

Решение. $\angle BMP = 180 - \angle PBA = \angle PCA = 180 - \angle PMC$, поэтому B, M, C лежат на одной прямой.

$\angle MCP = \angle BCP = \frac{1}{2}\angle BOP = \frac{1}{2}(180 - 2\angle OPB) = \frac{1}{2}(180 - 2\angle OBA) = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB = \angle ACM = \angle MPC$, поэтому $MP = MC$. □

Задача 3. Даны три квадратные трёхчлена с действительными коэффициентами:

$$f_1(x) = x^2 + a_1x + b_1; \quad f_2(x) = x^2 + a_2x + b_2; \quad f_3(x) = x^2 + a_3x + b_3.$$

Известно, что у каждого из трёх трёхчленов есть по два различных действительных корня. Оказалось, что при всех действительных x если одновременно верны оба неравенства $f_1(x) \geq 0$ и $f_2(x) \geq 0$, то верно и $f_3(x) \geq 0$. Докажите неравенство

$$a_3^2 + 8b_1 + 8b_2 \leq 2a_1^2 + 2a_2^2 + 4b_3.$$

Решение. Пусть $x_i < y_i$ — корни, а D_i — дискриминант трёхчлена $f_i(x)$ при $i = 1, 2, 3$.

По условию если $f_1(x) \geq 0$ и $f_2(x) \geq 0$, то и $f_3(x) \geq 0$. Иными словами, если $f_3(x) < 0$, то $f_1(x) < 0$ или $f_2(x) < 0$. Значит, интервал $(x_3; y_3)$ покрыт объединением интервалов $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Тогда

$$\sqrt{D_3} = y_3 - x_3 \leq (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) = \sqrt{D_1} + \sqrt{D_2}.$$

Возведём полученное неравенство на дискриминанты в квадрат, получим

$$D_3 = (\sqrt{D_3})^2 \leq (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2 = D_1 + D_2 + 2\sqrt{D_1 D_2} \leq 2D_1 + 2D_2.$$

Подставив формулы для дискриминантов, получим

$$a_3^2 - 4b_3 = D_3 \leq 2(D_1 + D_2) = 2(a_1^2 - 4b_1 + a_2^2 - 4b_2),$$

что равносильно искомому неравенству. □

Задача 4. Из клетчатой доски 2023×2023 вырезали квадратик 2×2 . Оказалось, что оставшуюся доску можно целиком разрезать на прямоугольники 1×5 и 5×1 . Докажите, что квадратик вырезали не с краю.

Решение 1 Докажем, что квадратик не мог быть вырезан, например, из первых двух строчек; для остальных краёв решение будет аналогично. Запишем в каждую клетку доски 2023×2023 номер строки, в которой она находится. Сумма всех чисел равна

$$2023 \cdot (1 + 2 + \dots + 2023) \equiv 3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 4}{2} \right) \equiv 3 \pmod{5}.$$

Если вырезать квадрат из первых двух строк, то сумма чисел в нём будет равна 6, тогда сумма чисел в оставшихся клетках будет давать остаток 2 при делении на 5.

Но в любом прямоугольнике 1×5 и 5×1 сумма чисел кратна 5. Поэтому если оставшуюся часть фигуры можно было бы разбить на такие прямоугольники, то сумма всех оставшихся чисел должна делиться на 5. Противоречие. $\square$

Решение 2. Раскрасим доску горизонтальными линиями в пять цветов, так что в первых пяти строках последовательно используются пять цветов, а далее раскраска циклически повторяется по строкам.

С одной стороны, каждый прямоугольник 1×5 или 5×1 разрезания либо включает пять клеток одного цвета, либо по одной клетке каждого цвета. Следовательно, общие количества клеток каждого цвета, оказавшихся в прямоугольниках (т. е. не в квадрате 2×2), дают одинаковые остатки от деления на 5.

С другой стороны, всего в доске по $405 \cdot 2023 \equiv 0 \pmod{5}$ клеток первого, второго и третьего цвета и по $404 \cdot 2023 \equiv 2 \pmod{5}$ клеток четвёртого и пятого цвета. Вырезанный квадратик может изменить эти количества только для тех двух цветов, в чьих строках он окажется. Ясно, что это должны быть четвёртый и пятый цвета, то есть квадратик не может быть вырезан с верхнего или нижнего края доски. Аналогично доказывается, что он не может быть вырезан с правого или левого края. $\square$

Задача 5. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I . Прямая ℓ , проходящая через I , повторно пересекает окружности, описанные около треугольников AIB и AIC , в точках P и Q соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника APQ лежит на описанной окружности треугольника ABC .

Решение. Отметим $D = BP \cap CQ$. Тогда

$$\angle DPQ = \angle BPI = \angle BAI = \angle IAC = \angle IQC = \angle PQD,$$

т. е. $DP = DQ$ и $\angle PDQ = \angle PAQ$, значит D лежит на описанной окружности треугольника ABC .

Тогда

$$\angle DPA = \angle BPA = \angle BIA = 90^\circ - \angle ICB$$

и

$$\angle ADP = \angle ADB = \angle ACB = 2\angle ICB,$$

таким образом $\angle PAD = 90^\circ - \angle ICB = \angle DPA$. Тогда $DA = DP = DQ$, значит D является центром описанной окружности APQ , и лежит на описанной окружности треугольника ABC . $\square$

Задача 6. Маша отметила на доске 100×100 несколько клеток и разрешила королю ходить только по отмеченным клеткам. Затем Маша выбрала две отмеченные клетки и сообщила Лене минимальное число ходов короля от одной до другой. Какое наибольшее число могла услышать Лена?

Решение. Оценка. Разобьём доску на 2500 квадратов 2×2 . Заметим, что в каждом из них король сделает не более 1 хода. Также заметим, что поскольку рассматривается кратчайший путь короля между двумя отмеченными клетками, то король побывает в каждом квадрате 2×2 не более одного раза за весь путь. Таким образом, Лена не могла услышать число, большее $2499 + 2500 = 4999$.

Пример. Пример пути длины $2k^2$ в квадрате $2k \times 2k$ строится так.

Путь в квадрате 2×2 начинается в левой верхней и заканчивается в правой нижней клетке. Если нужный путь в квадрате $(2k-2) \times (2k-2)$ уже построен и заканчивается в правой нижней клетке, добавим каемку ширины 2 вдоль нижней и левой стороны квадрата и продолжим путь одним ходом вниз, одним ходом вниз-влево, а затем по клеткам каемки по часовой стрелке, пропуская левый нижний угол и заканчивая в левом верхнем углу. При добавлении каемки добавилось $(2k)^2 - (2k-2)^2 = 8k - 4$ клетки, из них в проведенный путь попало $4k - 2$. Таким образом, мы получили путь длины $2(k-1)^2 + 4k - 2 = 2k^2$, а если доску повернуть на 180 градусов, он еще и будет снова заканчиваться в правом нижнем углу. Прделаав эту операцию, начиная с квадрата 2×2 , 49 раз, мы получим пример пути в квадрате 100×100 . $\square$