

Множества и булев куб

Бинарным кубом (или *булевым кубом*) размерности n будем называть граф, вершинам которого соответствуют всевозможные последовательности длины n из нулей и единиц; две вершины соединены ребром, если их последовательности отличаются ровно в одном разряде.

1. Сколько у бинарного куба размерности n **(а)** рёбер; **(б)** циклов длины 4?
2. Докажите, что в бинарном кубе есть гамильтонов цикл.
3. В стране 16 городов. Можно ли установить между ними дорожное сообщение так, чтобы из каждого города выходило не более 5 дорог и между любыми двумя городами был путь из не более чем двух дорог?
4. Сколькими способами можно выбрать 200 подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_{200}$ множества $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ так, чтобы выполнялось $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_{200}$?
5. Пусть S — 2022-элементное множество, n — целое число и $0 \leq n \leq 2^{2022}$. Докажите, что можно все подмножества множества S раскрасить в чёрный и белый цвета с соблюдением следующих трёх условий:
 - Объединение любых двух белых подмножеств — белое.
 - Объединение любых двух чёрных подмножеств — чёрное.
 - Белых подмножеств ровно n .
6. Из графа n -мерного куба удалили две вершины, соответствующие последовательностям из одних нулей и из одних единиц. При каких n в оставшемся графе можно выделить совершенное паросочетание?
7. Докажите, что в графе 2025-мерного куба найдётся гамильтонов путь, соединяющий две противоположные вершины.
8. **(а)** Множество строк длины 31, состоящих из нулей и единиц, таково, что любые две строки в нём отличаются хотя бы в трёх разрядах. Докажите, что в этом множестве не более 2^{26} элементов.
(б*) Постройте множество из 2^{26} строк, удовлетворяющее условиям первого пункта.