Чётность перестановки

Инверсией перестановки σ называется пара чисел i, j такая, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Чётностью перестановки называется чётность количества инверсий.

1. Докажите, что если в перестановке поменять 2 (не обязательно соседних) элемента, то чётность перестановки изменится.

2. **(а)** Докажите, что любую перестановку можно разложить в виде композиции транспозиций. **(б)** Что можно сказать про чётность композиции чётных перестановок? Чётной и нечётной? Двух нечётных?

3. Докажите, что следующие свойства эквивалентны:

- перестановка содержит чётное количество инверсий;
- перестановку можно получить из тождественной, используя чётное количество транспозиций;
- перестановку нельзя получить из тождественной, используя нечётное количество транспозиций;
- перестановка содержит чётное количество циклов чётной длины.

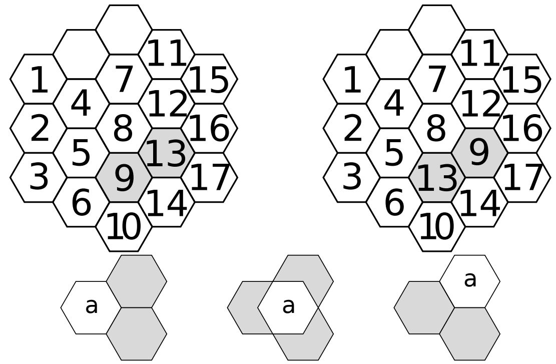
4. Для каких n цикл длины n можно представить как композицию нескольких циклов длины 3?

5. 2025 машин стартовали и целый день ездили по кругу. Вечером каждая машина оказалась на том же месте, откуда и стартовала. Докажите, что было совершено четное число обгонов.

6. Докажите, что нельзя в игре «Пятнашки» поменять фишки «14» и «15» , так чтобы все остальные остались на своих местах.

7. Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Имеются колпаки 25 различных цветов, заранее известных мудрецам. Султан сообщил, что на каждого из мудрецов наденут один из этих колпаков, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков, то все числа будут различны. Каждый мудрец будет видеть колпаки остальных мудрецов, а свой колпак нет. Затем все мудрецы одновременно огласят предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

8. Есть гексагональная доска со стороной n клеток, на ее клетках лежат шестиугольные плитки, пронумерованные натуральными числами. Две соседние клетки доски оставлены пустыми, благодаря чему плитки можно двигать. Две соседние по стороне плитки поменяли местами (см. пример на рисунке). Докажите, что при $n \geqslant 3$, двигая плитки, не удастся из первого положения получить второе.



Примечание. Чтобы подвинуть плитку a, рядом должны находиться две пустые клетки. Например, если они расположены справа от плитки a (см. левый рис.), мы можем подвинуть эту плитку вправо, пока она не упрется углом (рис. в центре), после чего ее можно сдвинуть вправо вверх или вправо вниз (рис. справа).