Лемма об изогоналях

Лемма об изогоналях. Пусть OC и OD — изогонали относительно угла AOB. Обозначим точку пересечения прямых AD и BC через P, а точку пересечения прямых AC и BD — через Q. Тогда прямые OP и OQ являются изогоналями относительно угла AOB.

Лемма верна для **любой** конфигурации, не только для изображённой на рисунке 1. Существует много вырожденных случаев, в которых лемма остаётся верной.

Какие-нибудь из прямых, например, AC и BD, могут быть параллельны. В этом случае прямую OQ нужно заменить на прямую, проходящую через O параллельно AC.

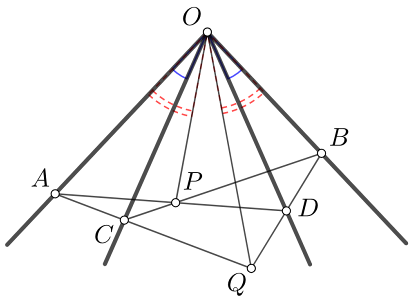


Рис. 1: Базовая картинка

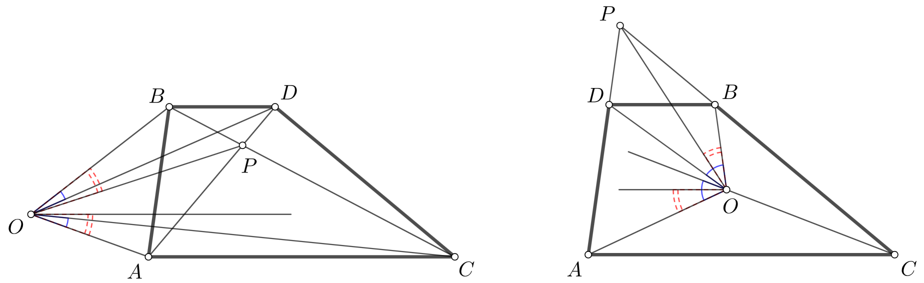


Рис. 2: «Лемма об изогоналях для трапеции»

Параллельными могут быть обе пары прямых: AC и BD, AD и BC. В этом случае лемма об изогоналях также верна, но более полезными будут следующие формулировки:

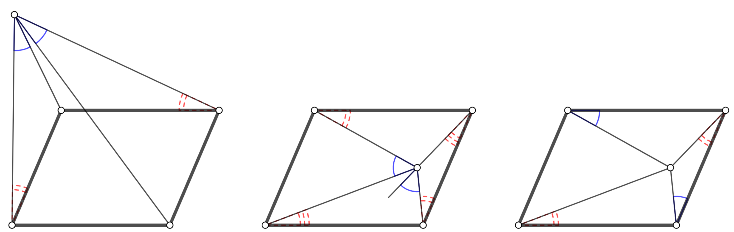


Рис. 3: «Лемма об изогоналях для параллелограмма»

Наконец, можно рассматривать случаи, когда какая-нибудь из точек, например, A, будет «бесконечно удалённой». В этом случае прямые AC и AD заменятся на прямые, проходящие через C и D соответственно параллельно OA.

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA', на отрезке AA' выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B' , а прямая CX пересекает AB в точке C' Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P, а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PAC и QAB равны.

2. К описанной окружности треугольника ABC проведены касательные в точках B и C. Лучи CC_1 и BB_1, где B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB, пересекают эти касательные в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке P. Точка X внутри $ABCD$ такова, что $PX \perp BC$ и $\angle AXB = \angle CXD$. Докажите, что X, точка пересечения диагоналей $ABCD$ и центр описанной окружности треугольника BXC лежат на одной прямой.

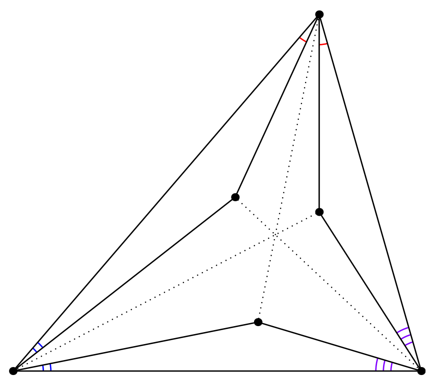
4. Пусть пары точек P и P', Q и Q' изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Докажите, что точки пересечения пар прямых PQ и $P'Q'$, PQ' и $P'Q$ изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

5. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке X. Точка Y на стороне BC такова, что $\angle XYC = \angle BCD$. Докажите, что $AY = DY$.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки I и K — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ACD соответственно, а J и L — центры их вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и CD соответственно. Докажите, что прямые IL и JK пересекаются на биссектрисе угла BCD.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равны углы B и C. Лучи DA и CB пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P параллельно AB, пересекает прямую BD в точке T. Докажите, что $\angle ACB = \angle PCT$.

8. Смотрите картинку.



К задаче 8