Интерполяционный многочлен Лагранжа

Построение многочлена степени не выше n по $n+1$ точке называется **интерполяцией**.

1. **Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Пусть $x_0, \ldots, x_n$ — различные вещественные числа, $y_0, \ldots, y_n$ — произвольные вещественные числа. Докажите, что есть ровно один многочлен степени не выше n, принимающий в точке x_i значение y_i для всех $i = 0, 1, \ldots, n$, задаваемый формулой

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\ldots\widehat{(x - x_i)}\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots\widehat{(x_i - x_i)}\ldots(x_i - x_n)},$$

где $\widehat{\quad}$ обозначает пропуск соответствующего множителя.

2. Для различных вещественных чисел a, b, c, d, e вычислите

$$\frac{(e-a)(e-b)(e-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(e-a)(e-b)(e-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \\ + \frac{(e-a)(e-c)(e-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

3. Найдите

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}.$$

4. **(а)** Многочлен $P(x)$ принимает во всех рациональных точках рациональные значения. Докажите, что его коэффициенты рациональны.

(б) А если в предыдущем пункте заменить рациональные на целые?

5. **(а)** Дан многочлен $P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Докажите, что для различных $x_1, x_2, \ldots x_n$, выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} = a_{n-1}.$$

(б) Докажите, что для многочлена степени не более $n-2$ выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_{n-1}^{i-1} P(i) = 0$$

6. Даны приведенный многочлен $Q(x)$ степени n, имеющий n различных вещественных корней $x_1, \ldots, x_n$, и многочлен $P(x)$ степени $< n$. Докажите, что дробь $P(x)/Q(x)$ представима в виде суммы слагаемых вида $\frac{A_i}{x - x_i}$ для некоторых вещественных чисел A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

7. Дано простое p и многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами степени не более $p-2$ такой, что $|P(1)| = |P(2)| = \ldots = |P(p)|$. Докажите, что P постоянный.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Е. С. Коган, А. А. Соколов
[2025–2026 уч. г.] группа 9-2 *6 октября 2025 г.*

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Построение многочлена степени не выше n по $n+1$ точке называется **интерполяцией**.

1. **Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Пусть $x_0, \ldots, x_n$ — различные вещественные числа, $y_0, \ldots, y_n$ — произвольные вещественные числа. Докажите, что есть ровно один многочлен степени не выше n, принимающий в точке x_i значение y_i для всех $i = 0, 1, \ldots, n$, задаваемый формулой

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\ldots\widehat{(x - x_i)}\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots\widehat{(x_i - x_i)}\ldots(x_i - x_n)},$$

где $\widehat{\quad}$ обозначает пропуск соответствующего множителя.

2. Для различных вещественных чисел a, b, c, d, e вычислите

$$\frac{(e-a)(e-b)(e-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(e-a)(e-b)(e-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \\ + \frac{(e-a)(e-c)(e-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

3. Найдите

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}.$$

4. **(а)** Многочлен $P(x)$ принимает во всех рациональных точках рациональные значения. Докажите, что его коэффициенты рациональны.

(б) А если в предыдущем пункте заменить рациональные на целые?

5. **(а)** Дан многочлен $P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Докажите, что для различных $x_1, x_2, \ldots x_n$, выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} = a_{n-1}.$$

(б) Докажите, что для многочлена степени не более $n-2$ выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_{n-1}^{i-1} P(i) = 0$$

6. Даны приведенный многочлен $Q(x)$ степени n, имеющий n различных вещественных корней $x_1, \ldots, x_n$, и многочлен $P(x)$ степени $< n$. Докажите, что дробь $P(x)/Q(x)$ представима в виде суммы слагаемых вида $\frac{A_i}{x - x_i}$ для некоторых вещественных чисел A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

7. Дано простое p и многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами степени не более $p-2$ такой, что $|P(1)| = |P(2)| = \ldots = |P(p)|$. Докажите, что P постоянный.