Интерполяционный многочлен Лагранжа

Построение многочлена степени не выше n по $n+1$ точке называется **интерполяцией**.

1. **Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Пусть $x_0, \ldots, x_n$ — различные вещественные числа, $y_0, \ldots, y_n$ — произвольные вещественные числа. Докажите, что есть ровно один многочлен степени не выше n, принимающий в точке x_i значение y_i для всех $i = 0, 1, \ldots, n$, задаваемый формулой
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\ldots\widehat{(x-x_i)}\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots\widehat{(x_i-x_i)}\ldots(x_i-x_n)},$$
где $\widehat{\quad}$ обозначает пропуск соответствующего множителя.

2. Для различных вещественных чисел a, b, c, d, e вычислите
$$\frac{(e-a)(e-b)(e-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(e-a)(e-b)(e-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \\ + \frac{(e-a)(e-c)(e-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

3. Для различных вещественных чисел a, b, c вычислите
$$\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(a+b)(b+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(a+c)(b+c)}{(c-a)(c-b)}.$$

4. **(а)** Дан многочлен $P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Докажите, что для различных $x_1, x_2, \ldots x_n$, выполнено равенство
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} = a_{n-1}.$$
(б) Докажите, что для многочлена степени не более $n-2$ выполнено равенство
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_{n-1}^{i-1} P(i) = 0$$

5. Даны приведенный многочлен $Q(x)$ степени n, имеющий n различных вещественных корней $x_1, \ldots, x_n$, и многочлен $P(x)$ степени $< n$. Докажите, что дробь $P(x)/Q(x)$ представима в виде суммы слагаемых вида $\frac{A_i}{x-x_i}$ для некоторых вещественных чисел A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

6. Дано простое p и многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами степени не более $p-2$ такой, что $|P(1)| = |P(2)| = \ldots = |P(p)|$. Докажите, что P постоянный.

7. Докажите, что $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big| \prod_{j \neq i} \frac{x-j}{i-j} \Big| < 2^n$ при $0 < x < n$.

[ЦПМ, кружок по математике, 9 класс] Е. С. Коган, А. А. Соколов
[2025–2026 уч. г.] группа 9-1 *6 октября 2025 г.*

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Построение многочлена степени не выше n по $n+1$ точке называется **интерполяцией**.

1. **Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Пусть $x_0, \ldots, x_n$ — различные вещественные числа, $y_0, \ldots, y_n$ — произвольные вещественные числа. Докажите, что есть ровно один многочлен степени не выше n, принимающий в точке x_i значение y_i для всех $i = 0, 1, \ldots, n$, задаваемый формулой
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\ldots\widehat{(x-x_i)}\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots\widehat{(x_i-x_i)}\ldots(x_i-x_n)},$$
где $\widehat{\quad}$ обозначает пропуск соответствующего множителя.

2. Для различных вещественных чисел a, b, c, d, e вычислите
$$\frac{(e-a)(e-b)(e-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(e-a)(e-b)(e-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \\ + \frac{(e-a)(e-c)(e-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(e-b)(e-c)(e-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

3. Для различных вещественных чисел a, b, c вычислите
$$\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(a+b)(b+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(a+c)(b+c)}{(c-a)(c-b)}.$$

4. **(а)** Дан многочлен $P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Докажите, что для различных $x_1, x_2, \ldots x_n$, выполнено равенство
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} = a_{n-1}.$$
(б) Докажите, что для многочлена степени не более $n-2$ выполнено равенство
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_{n-1}^{i-1} P(i) = 0$$

5. Даны приведенный многочлен $Q(x)$ степени n, имеющий n различных вещественных корней $x_1, \ldots, x_n$, и многочлен $P(x)$ степени $< n$. Докажите, что дробь $P(x)/Q(x)$ представима в виде суммы слагаемых вида $\frac{A_i}{x-x_i}$ для некоторых вещественных чисел A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

6. Дано простое p и многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами степени не более $p-2$ такой, что $|P(1)| = |P(2)| = \ldots = |P(p)|$. Докажите, что P постоянный.

7. Докажите, что $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big| \prod_{j \neq i} \frac{x-j}{i-j} \Big| < 2^n$ при $0 < x < n$.