

Разнойбой

1. Петя и Вася играют на доске $n \times n$, начинает Петя. Каждый игрок выбирает столбец или строку и красит её в свой цвет (не обращая внимание на предыдущие цвета). Один и тот же столбец или строку нельзя выбирать дважды. Петя хочет, чтобы после n ходов Пети и n ходов Васи клеток его цвета было как можно больше. Какого наилучшего результата он может добиться при правильной игре?
2. Натуральные числа x и y при делении на натуральное число n дают один и тот же остаток r . При этом их произведение xy делится на $n!$. Докажите, что $r = 0$.
3. Для любого натурального n докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[1]{2!}} + \frac{1}{\sqrt[2]{4!}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6!}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \geq \frac{n}{n+1}.$$

4. Рассмотрим граф, в котором каждое ребро принадлежит не более чем трём циклам. Докажите, что его вершины можно раскрасить в три цвета так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, имели разные цвета.