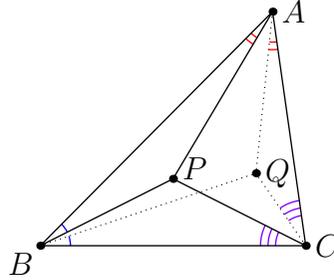


Изогональное сопряжение

Определения. Две прямые, проходящие через вершину угла, называются *изогоналями* относительно этого угла, если они симметричны относительно биссектрисы этого угла.

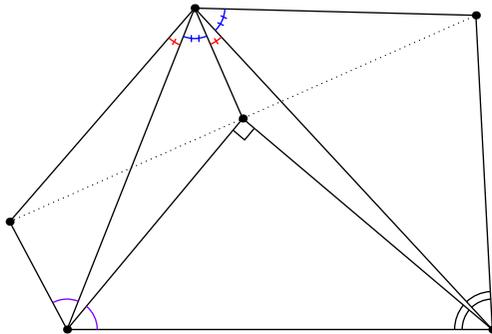
Точки P и Q называются *изогонально сопряжёнными* относительно треугольника ABC , если пары прямых AP и AQ , BP и BQ , CP и CQ являются изогоналями соответствующих углов треугольника.

Примеры. Точка пересечения высот и центр описанной окружности; центры вписанной и трёх внеписанных окружностей.



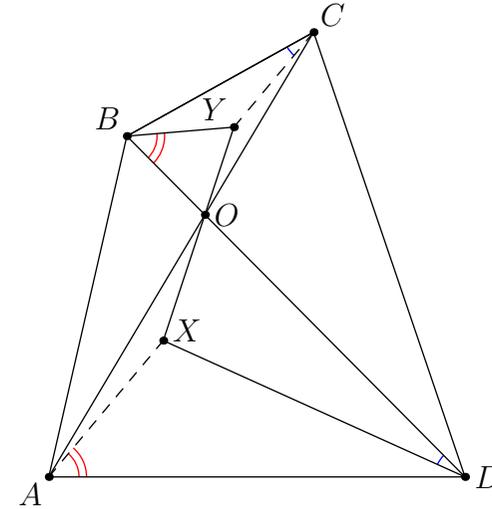
- (а) Дан треугольник ABC и точки P и Q такие, что $\angle BAP = \angle QAC$. Точки P_b и P_c симметричны точке P относительно прямых AC и AB . Докажите, что AQ является серединным перпендикуляром к P_bP_c .

(б) Докажите, что для точки P , не лежащей на описанной окружности треугольника ABC , существует изогонально сопряжённая ей точка Q . А что с точками на описанной окружности?
- Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC . Опустим из них перпендикуляры на прямые AB , AC , BC . Докажите, что 6 полученных точек лежат на одной окружности. Где находится центр этой окружности?
- Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P . Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC . Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC .
- Смотрите картинку.



К задаче 4

- В треугольнике ABC высоты AA_0 , BB_0 , CC_0 пересекаются в точке H . Для произвольной точки M пусть A_1 симметрична M относительно BC . Аналогично определим точки B_1 и C_1 . Докажите, что прямые A_0A_1 , B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.
- Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Точка P внутри треугольника ABC лежит на описанной окружности треугольника BIC , а точка P' изогонально сопряжена P в треугольнике ABC . Докажите, что $AP = AP'$.
- Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle C \neq 90^\circ$. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые AB , BC , AC , и середина отрезка AC лежат на одной окружности.
- В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника COD взята точка S , диаметрально противоположная точке O . Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.
- Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O . Внутри треугольников OAD и OBC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle OBY = \angle XAD$, $\angle ODX = \angle BCU$ и точки O , X , Y лежат на одной прямой. Оказалось, что точки A , B , C , D не лежат на одной окружности. Докажите, что $AX \parallel CY$.



К задаче 9