Теорема Виета

Теорема Виета. Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

1. Вещественные числа x, y, z таковы, что $x + y + z > 0, xy + yz + zx > 0$ и $xyz > 0$. Докажите, что все три числа положительны.

2. Известно, что $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b, c равно 1.

3. Известно, что для рациональных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражения

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

являются целыми для всех $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что тогда все исходные числа целые.

4. Целые числа a, b и c таковы, что числа $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

5. Пусть $f(x)$ — отношение двух квадратных трёхчленов. Известно, что $f(a) = a^3$ для всех $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Найдите $f(0)$.

6. Пусть $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ — многочлен степени $n \geqslant 3$. Оказалось, что $a_{n-1} = -C_n^1$ и $a_{n-2} = C_n^2$, и что все у многочлена $P(x)$ есть n действительных корней. Найдите оставшиеся коэффициенты многочлена $P(x)$.

7. Многочлен третьей степени имеет три различных корня строго между 0 и 1. Учитель сообщил ученикам два из этих корней. Ещё он сообщил все четыре коэффициента многочлена, но не указал, в каком порядке эти коэффициенты идут. Обязательно ли можно восстановить третий корень?

8. Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?