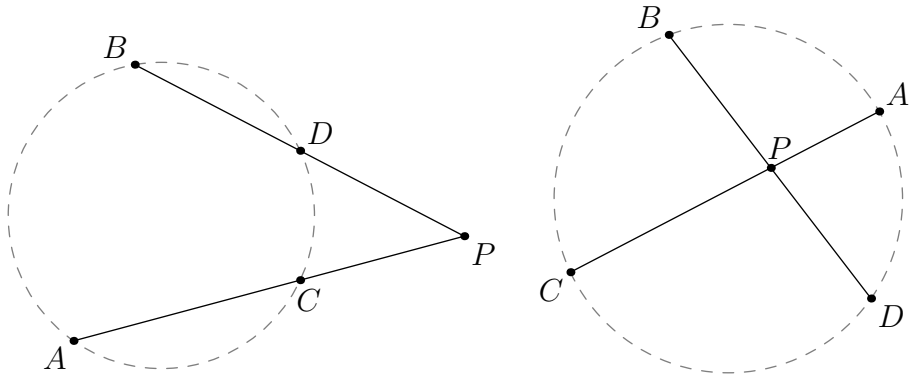
Степень точки

Определение 1. *Степенью* точки P относительно окружности ω радиуса r с центром в точке O называется величина $\mathrm{Pow}(P, \omega) = OP^2 - r^2$.

Определение 2. *Степенью* точки P относительно окружности ω называется величина $\pm PA \cdot PC$, где A и C — точки пересечения произвольной секущей через точку P с окружностью ω. Если точка P лежит вне окружности ω, то произведение берётся со знаком «+», а если внутри — то со знаком «−».

Утверждение.
(а) Определение 2 корректно в том смысле, что величина $PA \cdot PC$ не зависит от выбора секущей, проходящей через точку P.
(б) Определения 1 и 2 степени точки эквивалентны.



Метрический критерий вписанности. Для обеих картинок пунктирная окружность существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

1. Пусть AB и CD — общие внешние касательные к двум окружностям (точки A, D лежат на одной окружности, а B и C — на другой). Докажите, что окружности высекают на прямой AC равные отрезки.

2. Окружность ω проходит через вершины C и D равнобедренной трапеции $ABCD$ и пересекает диагональ AC и боковую сторону BC в точках P и Q соответственно. Точки P' и Q' симметричны точкам P и Q относительно середин отрезков AC и BC соответственно. Докажите, что точки A, B, P' и Q' лежат на одной окружности.

3. В треугольнике ABC проведены медиана AM и биссектриса AL. Описанная окружность треугольника AML пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $BX = CY$.

4. Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$. Диагонали AC и CE равны и пересекают диагональ BD в точках M и N соответственно. Известно, что $BM = ND$, $BC \neq CD$. Докажите, что точка, симметричная C относительно середины BD, лежит на прямой AE.

5. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Точки C' и B' симметричны точкам C и B относительно прямых AB и AC соответственно. Докажите, что C', B', P и Q лежат на одной окружности.

6. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка D — основание биссектрисы из вершины A. Прямая, проходящая через точку D пересекает окружность, описанную около треугольника BIC в точках X и Y. Докажите, что $\angle XAB = \angle YAC$.

7. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$. Точки X и Y на лучах CA и BD соответственно таковы, что $BX = CY$. Докажите, что середины отрезков BX, CY, XD и YA лежат на одной окружности.