Радикальные оси

Напоминание. Степенью точки P относительно окружности ω радиуса r с центром в точке O называется величина $\mathrm{Pow}(P, \omega) = OP^2 - r^2$.

Определение. *Радикальной осью* окружностей ω_1 и ω_2 с различными центрами называется ГМТ X таких, что $\mathrm{Pow}(X, \omega_1) = \mathrm{Pow}(X, \omega_2)$.

Утверждение. Радикальная ось двух окружностей — это прямая, перпендикулярная линии их центров.

Следствие. Рассмотрим три произвольные окружности с различными центрами. Их радикальные оси либо совпадают, тогда окружности называются *соосными*, либо параллельны, либо пересекаются в единственной точке, которая называется их *радикальным центром*.

1. Докажите, что середины отрезков всех общих касательных к двум непересекающимся окружностям лежат на одной прямой.

2. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

3. Четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB, а другая — хорду CD, отметим их точку касания X. Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности.

4. (*Решите без картинки*) На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отметили по две точки C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2 соответственно. Известно, что четырёхугольники $A_1A_2B_1B_2$, $B_1B_2C_1C_2$, $C_1C_2A_1A_2$ вписанные. Докажите, что все 6 отмеченных точек лежат на одной окружности.

5. Дан равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ ($AB = AC$). Пусть X — произвольная точка прямой BC, не совпадающая с B и C, а P и Q — проекции X на AB и AC соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABQ и ACP пересекаются на прямой AX.

6. **(а)** На прямых, содержащих стороны AC и AB треугольника ABC, отмечены точки B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на радикальной оси окружностей, построенных на BB_1 и CC_1 как на диаметрах.
(б) Дан четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC — в точке F. Докажите, что ортоцентры треугольников AED, BEC, DFC и AFB лежат на одной прямой (**прямая Обера**) и середины отрезков AC, BD и EF лежат на одной прямой (**прямая Гаусса**), причём эти прямые перпендикулярны.

7. Пусть точки I, O и H — это центры вписанной и описанной окружностей и ортоцентр треугольника ABC соответственно.
(а) Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке A_2. Аналогично определяются точки B_2 и C_2. Докажите, что точки A_2, B_2 и C_2 лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой OH.
(б) Докажите, что основания биссектрис внешних углов треугольника ABC лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой OI.

8. Различные точки A, B, C, D лежат на прямой именно в таком порядке. Окружности ω_1 и ω_2, построенные соответственно на отрезках AC и BD как на диаметрах, пересекаются в точках X и Y. Прямые XY и BC пересекаются в точке Z. Пусть P — произвольная точка прямой XY, отличная от Z. Прямая CP пересекает ω_1 в точках C и M, а прямая BP пересекает ω_2 в точках B и N. Докажите, что прямые AM, DN и XY пересекаются в одной точке.

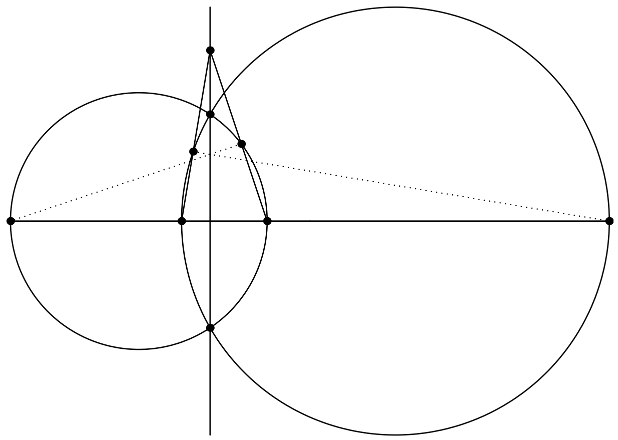

Рис. 1: К задаче 8.