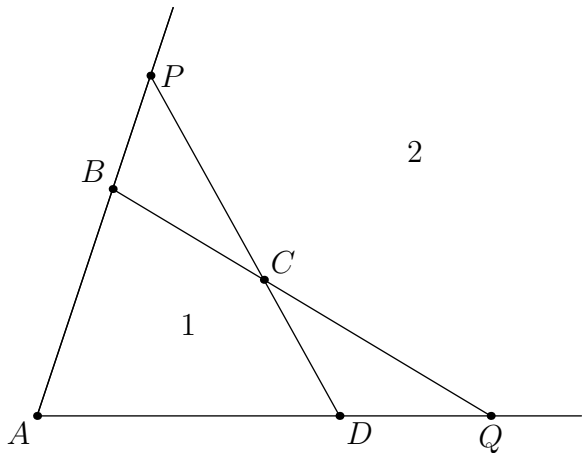


Признаки описанности



Критерий вписанности в область.

	<i>ABCD</i>	<i>APCQ</i>	<i>BPDQ</i>
Вписан в 1	$AB + CD = BC + AD$	$AP + CQ = PC + AQ$	$PD + DQ = PB + BQ$
Вписан в 2	$AB + BC = AD + DC$	?	?

1. Дозаполните таблицу выше: **(а)** первый пропуск **(б)** второй пропуск.
2. На сторонах BC и CD описанного четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки X и Y соответственно, Z — точка пересечения отрезков DX и BY . Оказалось, что четырёхугольник $ABZD$ — описанный. Докажите, что четырёхугольник $CXZY$ также описанный.
3. Две прямые, проходящие через точки пересечения пар противоположных сторон выпуклого четырёхугольника делят его на четыре меньших четырёхугольника. Докажите, что если какие-то два из этих четырёхугольников без общей стороны описанные, то и исходный четырёхугольник описанный.
4. В треугольнике ABC на стороне BC отметили точку D . Докажите, что вторая общая внутренняя касательная для окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD , отличная от AD , проходит через фиксированную точку.
5. Окружности S_1 и S_2 , S_2 и S_3 , S_3 и S_4 , S_4 и S_1 касаются внешним образом. Докажите, что четыре общие касательные (в точках касания окружностей) либо пересекаются в одной точке, либо касаются одной окружности.
6. Окружность с центром I касается сторон BC , AC и AB неравностороннего треугольника ABC в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. В четырёхугольники AC_1IB_1 и CA_1IB_1 вписаны окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_1 и ω_2 , отличная от IB_1 , проходит через точку B .

7. В треугольнике ABC на сторонах AB , BC и CA отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно так, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D . Оказалось, что AC_1DB_1 и A_1DB_1 описанные. Докажите, что DC_1BA_1 тоже описанный.¹
8. Пусть M — точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC , со стороной AB , T — произвольная точка стороны BC , отличная от вершины. Докажите, что три окружности, вписанные в треугольники $BMТ$, MTA , ATC , касаются одной прямой.
9. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, O — точка пересечения диагоналей AC и BD . Пусть окружности, описанные около треугольников ABO и COD , пересекаются в точке K . Точка L такова, что треугольник BLC подобен треугольнику AKD . Докажите, что если четырёхугольник $BLCK$ выпуклый, то он является описанным.

¹Видели такую картинку раньше?