Гамильтоновы графы

Определение. *Гамильтонов путь* (*цикл*) в графе — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

Граф называется *гамильтоновым*, если в нём существует гамильтонов цикл.

1. Докажите, что **(а)** любой полный ориентированный граф содержит гамильтонов путь; **(б)** полный ориентированный граф с $n > 2$ вершинами является сильно связным тогда и только тогда, когда он гамильтонов.

2. **(а)** В графе на $n \geqslant 3$ вершинах выбран простой путь $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Известно, что $\deg v_1 + \deg v_k \geqslant n$. Докажите, что найдется простой цикл, содержащий $v_1, v_2, \ldots, v_k$ в некотором порядке (и, возможно, некоторые другие вершины).
(б) В графе G на n вершинах для любых двух несоседних вершин A и B верно $\deg A + \deg B \geqslant n - 1$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов путь.

3. **(а)** В графе G на n вершинах даны несоседние вершины A и B. Известно, что $\deg A + \deg B \geqslant n$. Граф G' получается из графа G добавлением ребра AB. Докажите, что граф G' гамильтонов тогда и только тогда, когда граф G гамильтонов.
(б) (Теорема Оре) В графе G на $n \geqslant 3$ вершинах для любых двух несоседних вершин A и B верно $\deg A + \deg B \geqslant n$. Докажите, что граф G гамильтонов.

4. Какое максимальное количество рёбер может быть в графе, в котором нет гамильтонова пути?

5. В графе все вершины имеют степень 3. Известно, что количество раскрасок ребер данного графа в три цвета таких, что в каждой вершине сходится три разноцветных ребра, не делится на 4. Докажите, что граф гамильтонов.

6. Для графа G и натурального числа d обозначим через G^d граф на тех же вершинах, в котором вершины x и y соединены ребром тогда и только тогда, когда в G есть простой путь между x и y с не более чем d рёбрами.
(а) Докажите, что для любого связного графа G с хотя бы тремя вершинами граф G^3 гамильтонов.
(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если заменить G^3 для G^2?

7. Рассмотрим граф *де Брёйна*: вершинами данного графа являются последовательности из нулей и единиц длины n, а ориентированные рёбра ведут из последовательности $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ в последовательность $a_1 a_2 \ldots a_n$. Докажите, что для любого n граф де Брёйна является гамильтоновым.