Диагностическая работа. Очный этап.

Задача 1. Попарно различные натуральные числа a, b и c таковы, что числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b больше 1.

Решение. Поскольку числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию, выполнено равенство

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Longleftrightarrow 2ac = b(a+c).$$

Значит, число $b(a+c)$ делится на a. Предположим, что НОД$(a,b) = 1$. Тогда $a+c$ делится на a, откуда следует, что и c делится на a. Значит, $c \geq a$. Однако согласно условию

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{c} \Longleftrightarrow c < a,$$

противоречие. $\square$

Задача 2. На вечеринке каждый гость является другом ровно четырнадцати других гостей (не считая его самого). У каждых двух друзей есть ровно шесть общих друзей, пришедших на вечеринку, в то время как у каждой пары гостей, не являющихся друзьями, есть только два общих друга. Сколько гостей на вечеринке?

Решение. Построим вспомогательный граф G. Каждому из гостей будет соответствовать вершина графа G, а две вершины мы соединим ребром, если соответствующие им гости дружат. Пусть в графе G всего n вершин.

Назовём *галочкой* пару рёбер, выходящих из одной вершины. Посчитаем двумя способами число галочек в G. С одной стороны, поскольку степень каждой вершины графа G равна 14, к каждой вершине примыкает ровно $C_{14}^2 = \frac{14\cdot 13}{2} = 91$ галочка, поэтому всего их $91n$.

С другой стороны, согласно условию для каждой пары вершин, соединённых ребром, есть 6 способов дополнить их третьей вершиной до галочки так, чтобы два ребра этой галочки сходились в добавленной вершине, а для каждой пары веришн, не соединённых ребром, есть 2 таких способа. Поскольку в графе G всего $\frac{14\cdot n}{2} = 7n$ рёбер, получаем, что число галочек в G равно $7n \cdot 6 + \left(\frac{n(n-1)}{2} - 7n\right) \cdot 2 = 28n + n(n-1)$. Приравнивая два полученных выражения для числа галочек, получаем

$$28n + n(n-1) = 91n \Longleftrightarrow n = 64.$$

$\square$

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) точка F — пересечение высоты CD с биссектрисой AE, а G — точка пересечения прямых ED и BF. Докажите, что площадь четырёхугольника $CEGF$ равна площади треугольника BDG.

Решение. Поскольку $S_{EDB} = S_{BGE} + S_{BDG}$ и $S_{BFC} = S_{BGE} + S_{CEGF}$, достаточно доказать равенство площадей треугольников BDE и BFC.

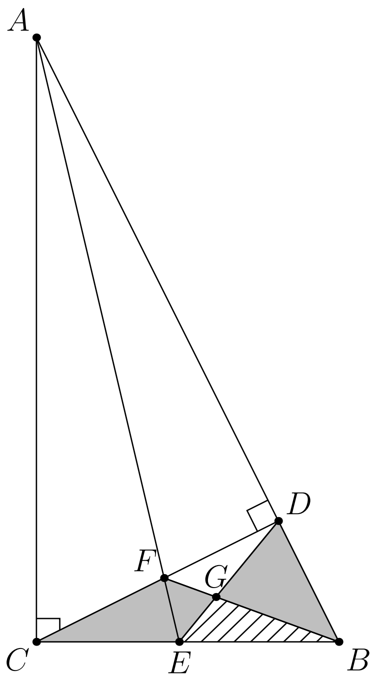

Рис. 1: К решению задачи 3

Пусть DH_1, FH_2 — перпендикуляры из точек D и F на прямую BC соответственно. Тогда $2S_{BDE} = DH_1 \cdot BE$, $2S_{BFC} = FH_2 \cdot BC$. Значит, достаточно доказать, что $\frac{DH_1}{FH_2} = \frac{BC}{BE}$. По основному свойству биссектрисы $\frac{BC}{BE} = \frac{AC+AB}{AB} = 1 + \frac{AC}{AB}$. С другой стороны, применяя теорему Фалеса и основное свойство биссектрисы в треугольнике ADC, получаем $\frac{DH_1}{FH_2} = \frac{DC}{CF} = \frac{AD+AC}{AC} = 1 + \frac{AD}{AC}$. Однако треугольники ABC и ACD подобны по двум углам, поэтому $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$, что завершает доказательство искомого равенства. □

Задача 4. В озере, в котором живут 22 лягушки с номерами $1, 2, \ldots, 22$ (каждый номер встречается один раз), по кругу расположены 23 камня. Изначально каждая лягушка случайным образом садится на один камень (на одном камне могут сидеть несколько лягушек). Каждую минуту все лягушки одновременно совершают по одному прыжку по следующему правилу: лягушка с номером i прыгает на i камней вперёд по часовой стрелке. (В частности, лягушка с номером 22 прыгает на 1 камень против часовой стрелки.) Докажите, что в какой-то момент не менее 6 камней останутся пустыми.

Решение. Занумеруем камни по часовой стрелке остатками $0, 1, \ldots, 22$ по модулю 23. Тогда прыжок i-й лягушки соответствует прибавлению к номеру её камня числа i по модулю 23. Предположим, что ни в один момент времени не найдётся 6 пустых камней. Рассмотрим расположения лягушек после $0, 1, \ldots, 22$ прыжков. Заметим, что это все возможные расположения лягушек, поскольку после 23 прыжков расположения лягушек зациклятся. Заметим, что для любых стартовых номеров лягушек $i \neq j$ найдётся ровно 1 момент времени (от 0 до 22 включительно), когда они будут сидеть на одном камне. Действительно, сравнение $a + it \equiv b + jt \mod (23)$ имеет единственное решение, поскольку ненулевой остаток $i - j$ обратим по модулю 23 (так как 23 — простое число). Таким образом, всего есть ровно $C_{23}^2 = \frac{22 \cdot 21}{2} = 231$ пара лягушек, которая будет сидеть на одном камне после не более чем 22 прыжков. С другой стороны, для каждого i от 0 до 22 в силу предположения после i прыжков будут заняты как минимум 18 камней. Временно оставим на каждом из занятых камней по одной лягушке и по очереди вернём 4 оставшихся лягушки на их места. Тогда после возвращения j-й лягушки появляется не более j новых пар лягушек, сидящих на одном камне. Значит, будет не более чем $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ пар лягушек, попавших на один камень после ровно i прыжков для каждого i от 0 до 22. Тогда всего совпадений будет не более $23 \cdot 10 = 230 < 231$ — противоречие. $\square$

Задача 5. Пусть a, b, c — такие положительные действительные числа, что $abc = 1$. Докажите, что

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3 \geq 4(a + b + c).$$

Решение. Деля исходное неравенство на $(a + b + c)$, получаем эквивалентное

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \cdot 3 + \frac{3}{a + b + c} \geq 4.$$

По неравенству о средних получаем, что

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \cdot 3 + \frac{3}{a + b + c} \geq 4\sqrt[4]{\frac{(ab + bc + ca)^3}{9(a + b + c)}},$$

поэтому достаточно доказать неравенство

$$\frac{(ab + bc + ca)^3}{9(a + b + c)} \geq 1.$$

Заметим, что по неравенству о средних $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$. Также выполнено неравенство $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$. Действительно, после замены $x = ab$, $y = bc$, $z = bc$ данное неравенство принимает вид $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, которое после раскрытия скобок превращается в известное неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (обосновать которое можно, домножив его на 2 и переписав в виде $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x^2) \geq 0$).

Таким образом, пользуясь доказанными неравенствами и учитывая, что $abc = 1$, получаем

$$\frac{(ab + bc + ca)^3}{9(a + b + c)} \geq \frac{3 \cdot 3abc(a + b + c)}{9(a + b + c)} = 1,$$

что и требовалось.

$\square$

Задача 6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, где $AB > CD$, и AB не параллельно CD. Точка M является пересечением диагоналей AC и BD, а перпендикуляр из M на AB пересекает отрезок AB в точке E. Оказалось, что прямая EM делит угол CED пополам. Докажите, что AB является диаметром ω.

Решение. Пусть P — середина «малой» дуги CD окружности, описанной около треугольника CED. Заметим, что P лежит на EM и на серединном перпендикуляре к отрезку CD, причём эти две прямые различны, поскольку в противном случае AB и CD были бы обе перпендикулярны прямой EM, а значит параллельны, что запрещено условием.

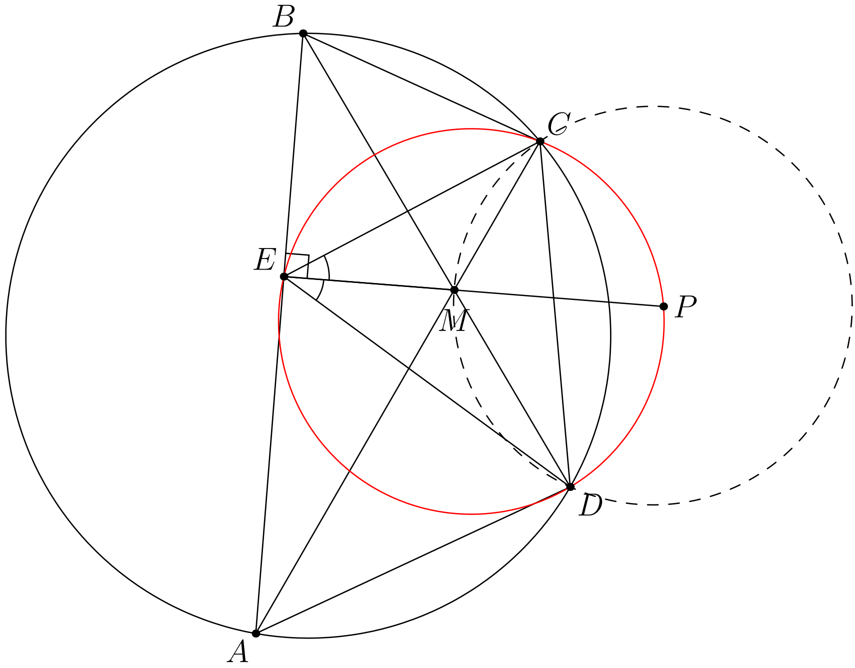

Рис. 2: К решению задачи 6

Пусть MH — перпендикуляр из M на CD. Заметим, что

$$\angle PMD = \angle BME = 90^\circ - \angle MBE = 90^\circ - \angle MCD = \angle CMH,$$

где $\angle MBE = \angle MCD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Получается, P — такая точка на серединном перпендикуляре к отрезку CD, что $\angle PMD = \angle CMH$. Поскольку направления из вершины треугольника на ортоцентр и центр описанной окружности симметричны относительно биссектрисы угла треугольника, примыкающего к этой вершине, получаем, что P — центр описанной окружности треугольника CMD. По лемме о трезубце получаем, что M — центр окружности, вписанной в треугольник CDE. Но тогда A и B — центры вневписанных окружностей треугольника CDE, касающихся сторон DE и CE соответственно. Тогда BD и AD — это внутренняя и внешняя биссектрисы угла CDE, то есть $\angle BDA = 90^\circ$. Отсюда вытекает, что AB — диаметр окружности ω, что и требовалось доказать. $\square$