

# ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ

## Алгебра

1. **Принцип телескопирования.** Найдите сумму  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ .

2. Найдите сумму

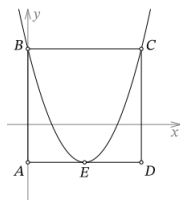
$$\frac{2}{3} + \frac{4}{21} + \frac{6}{91} + \dots + \frac{2n}{n^4 + n^2 + 1}$$

3. **Квадратный трёхчлен. Дискриминант квадратного трёхчлена. Корни квадратного трёхчлена. Теорема Виета.**

4. Учитель написал на доске квадратное уравнение  $x^2 + 1111x + 2222$ , после чего каждый из учеников по очереди увеличивал или уменьшал на единицу либо коэффициент при  $x$ , либо слагаемое без  $x$ . В результате на доске оказалось написано уравнение  $x^2 + 2222x + 1111$ . Верно ли, что в некоторый момент на доске было написано уравнение с целыми корнями?

5. **График квадратного трёхчлена. Направление осей, координаты вершины, точка пересечения с осью ординат.**

6. Стороны квадрата  $ABCD$  параллельны осям координат, причём  $AB$  лежит на оси ординат, а сам квадрат расположен так, как показано на рисунке. Парабола, задаваемая уравнением  $y = \frac{1}{5}x^2 + ax + b$ , проходит через точки  $B$  и  $C$ . Кроме этого, вершина этой параболы (точка  $E$ ) лежит на отрезке  $AD$ . Найдите сумму корней квадратного трёхчлена, графиком которого является парабола.



7. **Алгебраические преобразования.** Положительные числа  $a, b, x, y$  таковы, что  $x^2 - x + 1 = a^2$ ,  $y^2 + y + 1 = b^2$  и  $(2x - 1)(2y + 1) = 2ab + 3$ . Докажите, что  $x + y = ab$ .

8. **Целая и дробная часть. Свойства целой и дробной части.**

9. Решите уравнение  $\{2\{2x\}\} = x$ .

10. Докажите, что для произвольного  $x$  и натурального  $n$  верно

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

11. Докажите, что для любого натурального  $n$  верно  $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$ .
12. **Неравенство о средних.**
13. Сумма чисел  $a_1, a_2, a_3$ , каждое из которых больше 1, равна  $S$ , причем  $\frac{a_i^2}{a_i-1} > S$  для любого  $i = 1, 2, 3$ . Докажите, что  $\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \frac{1}{a_3+a_1} > 1$ .
14. Сумма положительных чисел  $a, b, c$  равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

15. Про положительные числа  $x, y, z$  известно, что  $xyz^2z^3 = 108$ . Найдите наименьшее значение  $x + y + z$ .
16. **Метод Штурма.** Примеры использования.
17. Докажите, что при  $x_1, \dots, x_n \geq 1$  выполнено неравенство

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}.$$

## Теория чисел

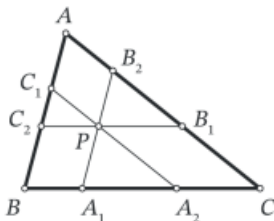
18. **Построение примеров.** Докажите, что уравнение  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = n^2$  имеет решение в различных натуральных числах для любого натурального  $k$ .
19. Существуют ли такие натуральные  $x, y, z > 20252025$ , что  $(x^2+1)(y^2+1) = z^2+1$ ?
20. Найдите четыре различных числа  $a, b, c$  и  $d$ , больших миллиона, таких, что:  $a + bc$  делится на  $d$ ,  $b + cd$  делится на  $a$ ,  $c + da$  делится на  $b$  и  $d + ab$  делится на  $c$ .
21. Докажите, что найдутся четыре таких целых числа  $a, b, c, d$  по модулю больших  $10^{10}$ , что  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}$ .
22. **Степень вхождения простого. Свойства степени вхождения.**
23. Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что число  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  является целым. Верно ли, что  $abc$  — точный куб?
24. **Собственные делители числа. Принципы работы с ними.** Дано натуральное число  $n$ . На доске выписаны все натуральные числа от 900...00 до 1200...00 (оба числа оканчиваются на  $n$  нулей). У каждого из них выбрали собственный делитель. Докажите, что хотя бы два из этих делителей совпадают.
25. **Полная и приведенная системы вычетов. Их свойства.**
26. **Функция Эйлера. Мультипликативность, явная формула.**

27. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера.
28. Решение линейных сравнений и систем сравнений. Китайская теорема об остатках.
29. Пусть  $x^a \equiv 1 \pmod n$  и  $x^b \equiv 1 \pmod n$ . Докажите, что  $x^{(a;b)} \equiv 1 \pmod n$ .
30. Докажите, что простых чисел вида  $6n + 1$  бесконечно много.
31. Пусть  $p$  — простое число. Докажите, что  $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv -1 \pmod p$  тогда и только тогда, когда  $p$  — простое вида  $p = 4k + 1$ .

## Геометрия

32. Параллелограмм Вариньона. Случаи ромба, прямоугольника, квадрата.
33. Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle A = 42^\circ$  и  $AB < AC$ . Точка  $K$  на стороне  $AC$  такова, что  $AB = CK$ . Точки  $P, Q$  — середины отрезков  $AK, BC$  соответственно. Найдите угол  $ACB$ , если  $\angle PQC = 120^\circ$ .
34. Вписанный угол. Теорема о вписанном угле. Угол между хордами. Угол между секущими. Угол между хордой и касательной.
35. На прямой отметили точки  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  — именно в таком порядке. На отрезках  $X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_9X_{10}$  как на основаниях построили равнобедренные треугольники с углом  $\alpha$  при вершинах. Оказалось, что все эти вершины лежат на одной полуокружности с диаметром  $X_1X_{10}$ . Найдите  $\alpha$ .
36. Вписанный четырёхугольник. Критерии вписанного четырёхугольника.
37. Вписанная окружность с центром  $I$  треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB, AC$  в точках  $M, N$  соответственно. Прямая  $MN$  пересекает биссектрису угла  $B$  в точке  $P$ . Докажите, что точки  $N, I, C, P$  лежат на одной окружности.
38. В окружность вписан четырёхугольник  $ABCD$ . Отметили центры окружностей, вписанных в треугольники  $BDC, CDA, DAB, ABC$ . Докажите, что отмеченные точки являются вершинами прямоугольника.
39. Лемма Архимеда. В окружности проведена хорда  $AB$ . Вторая окружность касается этой хорды в точке  $M$  и первой окружности в точке  $K$ . Докажите, что  $KM$  — биссектриса угла  $AKB$ .
40. Две окружности касаются внешним образом в точке  $D$ . Провели прямую, которая касается первой окружности в точке  $A$  и пересекает вторую в точках  $B, C$ . Докажите, что точка  $A$  равноудалена от прямых  $DB, DC$ .
41. Теорема о биссектрисе и внешней биссектрисе.

42. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BD$ . Докажите, что  $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$ .
43. **Теорема Птолемея.** Четырёхугольник  $ABCD$  вписан. Докажите, что  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .
44. **Неравенство Птолемея.** Докажите, что в произвольном четырёхугольнике  $ABCD$  верно неравенство  $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ . В каких случаях неравенство превращается в равенство?
45. Дана трапеция  $ABCD$ . Прямая  $l$  пересекает отрезки  $AB$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$ , диагонали  $AC$  и  $BD$  — в точках  $M$  и  $N$ , прямые  $AD$  и  $BC$  — в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что если  $XP = YQ$ , то  $PM = QN$ .
46. **Принцип Карно и теорема Карно.**
47. Треугольник  $ABC$  — правильный,  $P$  — произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, проведённые из центров вписанных окружностей треугольников  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  на прямые  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  соответственно, пересекаются в одной точке.
48. **Степень точки. Вычисление степени точки в разных случаях.**
49. **Радикальная ось. Радикальный центр.**
50. Дана неравносторонняя трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Окружность, проходящая через точки  $B$  и  $C$ , пересекает боковые стороны трапеции в точках  $M$  и  $N$ , а диагонали — в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что прямые  $XY$ ,  $MN$  и  $AD$  пересекаются в одной точке.
51. **Площадь фигуры. Медиана делит треугольник на два равновеликих. Рельсы Евклида. Лемма о крыльях бабочки.**
52. Через точку  $P$  внутри треугольника провели прямые, параллельные сторонам. Эти прямые пересекают стороны треугольника в точках, указанных на рисунке. Докажите, что  $S_{A_2B_2C_2} = S_{A_1B_1C_1}$ .



53. На клетчатой плоскости нарисован многоугольник с вершинами в узлах сетки. При этом нет сторон, идущих по линиям сетки. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки, лежащих внутри многоугольника, равна сумме длин горизонтальных отрезков, лежащих внутри него.

54. **Геометрия от обратного.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $45^\circ$ , а чевианы  $BD$  и  $CF$  равны и перпендикулярны. Докажите, что  $BC = BD$ .
55. **Симметрия ортоцентра относительно стороны и середины стороны.** Свойства этой симметрии.
56. **Прямая и окружность Эйлера.**
57. **Критерии центра описанной окружности.**
58. В треугольнике  $ABC$   $AB = AC$ ,  $\angle BAC = 100^\circ$ . Внутри треугольника  $ABC$  взята такая точка  $M$ , что  $\angle MCB = 20^\circ$ ,  $\angle MBC = 30^\circ$ . Найдите  $\angle BAM$ .

## Разная комбинаторика

59. **Принцип крайнего в комбинаторной геометрии.** На плоскости дано  $n \geq 3$  точек, причем не все они лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.
60. **Формулы комбинаторики.** С помощью комбинаторной интерпретации докажите формулу  $C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \dots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+m}^k$ .
61. С помощью комбинаторной интерпретации докажите формулу  $C_n^0 \cdot C_n^m + C_n^1 \cdot C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_n^m \cdot C_{n-m}^0 = 2^m \cdot C_n^m$ .
62. **Метод выделенных множеств.** Какое наименьшее число коней нужно расставить на шахматной доске так, чтобы все клетки доски оказались побиты? (Конь бьёт клетку, в которой стоит.)
63. **Теория информации.** Имеется  $n$  бутылок с водой, в одной вода испорчена, и 10 мышей. Если мышь выпьет плохую воду, то ночью она умирает. Для какого наибольшего  $n$  можно гарантированно найти бутылку с испорченной водой за 6 дней?
64. Зритель попал на шоу. Перед ним 40 дверей, за одной из них автомобиль, и за остальными — козы. Ведущий знает, за какой дверью находится автомобиль. Зритель может послать ведущему несколько писем с вопросами, требующих ответа да или нет. Ведущий вытаскивает все письма в произвольном порядке и отвечает на них. Если после первого ответа ведущего зритель все еще не знает, где приз, он может послать письма еще один раз на тех же условиях. Какое наименьшее число писем суммарно нужно послать, чтобы зритель наверняка указал на дверь, за которой автомобиль?
65. **Распределение весов.** Несколько камней разложены в  $N$  кучек. Затем камни разложили по-другому, в  $n < N$  кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

66. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами  $(i; j)$  и добавить по фишке в узлы  $(i + 1; j)$  и  $(i; j + 1)$  при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел. Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.
67. **Усреднение.** На плоскости отмечено 40 точек. Сумма площадей всех треугольников с вершинами в этих точках равна 9. Докажите, что можно стереть половину точек так, чтобы сумма площадей оставшихся треугольников была не менее 1.
68. В таблице  $20 \times 20$  в каждой клетке стоит крестик или нолик, причем в каждом столбце ровно 10 крестиков и 10 ноликов. Докажите, что можно найти две строки, которые совпадают, по крайней мере, в 10 позициях.
69. **Моменты.** В ряд записано  $N$  чисел. Каждую секунду робот выбирает какую-либо пару рядом стоящих чисел, в которой левое число больше правого, меняет их местами и при этом умножает оба числа на 2. Докажите, что через некоторое время сделать очередную такую операцию будет невозможно.
70. **Подсчёты в графах.** В каждый из 11 школьных кружков записалось по 45 человек. Известно, что у любых двух кружков ровно 9 общих учеников. Докажите, что всего учеников хотя бы 165.
71. В классе 20 учеников. Каждый дружит не менее чем с 10 другими. Докажите, что в этом классе можно выбрать две тройки учеников так, чтобы любой ученик из одной тройки дружил с любым учеником из другой тройки.
72. **Индукция в графах. особенности применения. Пример неверного индукции в графах.**
73. Каждые два из  $n$  городов соединены одной ориентированной синей или красной дорогой. Докажите, что найдётся такой город, из которого в любой другой город можно проехать по одноцветному пути.
74. **Табличные графы.** В таблице отмечено несколько клеточек. Докажите, что их можно покрасить в синий и красный цвета так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце разница между количеством синих и красных клеточек была бы не более 1.
75. **Принцип неоднозначных данных.** Примеры задач.
76. **Планарные графы. Ключевые формулы.**
77. Фуллерен — это граф, все степени вершин которого равны 3, а все грани — это пяти и шестиугольники (например, футбольный мяч). Найдите

количество пятиугольных граней у фуллеренов.

- 78. Формула включений-исключений для произвольного количества множеств.**
- 79.** На плоскости расположено  $n$  фигур. Пусть  $S_i$ —сумма площадей всех частей плоскости, являющихся пересечением каких-то  $i$  фигур, а  $S$ —площадь объединения этих фигур. Докажите, что  $S \geq S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{k+1} S_k$  при чётном  $k$  и  $S \leq S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{k+1} S_k$  при нечётном.
- 80. Алгоритмы вслепую.** Примеры задач.
- 81. Ориентированные графы. Турниры. Сильная связность. Разделение ориентированного графа на компоненты сильной связности.**
- 82.** Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.