

ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ

Алгебра

1. **Теорема Виета.** У квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ есть два различных действительных корня x_1 и x_2 . Известно, что $f(x_1 + x_2) = 2025$. Чему равно c ?

2. **Симметрия графика квадратного трёхчлена.** Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

3. **Графический способ и непрерывность при определении числа корней квадратного трёхчлена.** У квадратного трёхчлена $f(x)$ два действительных корня разность которых не меньше 2025. Докажите, что у уравнения

$$f(x) + f(x + 1) + \dots + f(x + 2025) = 0$$

тоже два действительных корня.

4. **Доказательство неравенств с использованием свойств квадратного трёхчлена.** Докажите неравенство $a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1)$.

5. **Анализ с конца в алгебре.** Пусть a, b, c — ненулевые действительные числа такие, что

$$(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3.$$

Докажите, что числа a, b, c в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию.

6. **Симметрическая задача.** Найдите все такие тройки действительных чисел x, y, z , что

$$1 + x^4 \leq 2(y - z)^2, \quad 1 + y^4 \leq 2(z - x)^2, \quad 1 + z^4 \leq 2(x - y)^2.$$

7. **Циклическая задача.** Даны положительные числа x, y, z . Докажите неравенство

$$\frac{x + 1}{y + 1} + \frac{y + 1}{z + 1} + \frac{z + 1}{x + 1} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

8. **Транснеравенство для упорядоченных наборов.** Какое наибольшее и наименьшее значение может принимать сумма шестизначного и восьмизначного чисел НИЖНИЙ + НОВГОРОД?

9. **Одномонотонные и разномонотонные наборы.** Транснеравенство в несимметрических задачах. Докажите неравенство АМ – ГМ, используя транснеравенство.

10. **Скрытый квадратный трёхчлен.** Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$

Докажите, что число $1 - ab$ является квадратом рационального числа.

11. **Серийные решения.** Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 - c^2 = 2025$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах, построив не менее трёх концептуально разных(!) серий.

12. **Спецификация.** Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, не обязательно с целыми коэффициентами. Известно, что при некоторых целых a и b разность $P(a) - P(b)$ является квадратом натурального числа. Докажите, что существует более 52^{67} таких пар целых чисел (c, d) , что разность $P(c) - P(d)$ также является квадратом натурального числа.

13. **Рациональные и иррациональные числа.** Рационально или иррационально следующее число

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \quad ?$$

14. **Свойство ряда равных отношений.** Действительные числа a, b и c таковы, что

$$\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c}.$$

Чему может быть равно $\frac{a+b}{c}$?

15. **Целая и дробная части числа.** Найдите количество решений уравнения

$$\{(x+1)^3\} = x^3$$

16. **Метод Штурма.** Докажите неравенство для любых $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$
- (а) с произведением 1

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_n) \geq 2^n$$

(б) с суммой 1

$$(1+x_1)(2+x_2) \cdot \dots \cdot (n+x_n) \leq 2n!$$

Теория чисел

17. **Функция Эйлера. Мультипликативность, явная формула.**
18. **Малая теорема Ферма и теорема Эйлера. Порядок числа по простому модулю. Нахождение обратного остатка.**
19. **Решение линейных сравнений и систем сравнений. Китайская теорема об остатках.**
20. **Телескопирование. Обратные остатки.** Докажите, что для любого простого p числа от 1 до $p - 1$ можно так выписать в ряд a_1, a_2, \dots, a_{p-1} , что все произведения $a_1 a_2 \dots a_k$ различны по модулю p .
21. **Префиксные суммы. Полная и приведённая системы вычетов.** Дано $n - 1$ натуральное число, меньшее n . Для всех $1 \leq k \leq n - 1$ сумма любых k из них не кратна n . Докажите, что они все равны.
22. **Степень вхождения простого множителя. Основные арифметические свойства. Обобщение на рациональные числа.** Докажите, что число $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1}$ не может быть целым.
23. Дмитрий Александрович вычислил остатки при делении одного и того же натурального числа на $2, 3, 4, \dots, 99, 100$. Среди остатков встретились все числа из набора $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$, за исключением одного ненулевого числа k . Определите наименьшее возможное значение числа k .
24. **Теорема Виета по простому модулю.** Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $a + b + c + d$ и $ab - cd$ делятся на 67. Докажите, что $a + b + c + d$ хотя бы 134.
25. **«Зажим между» в задачах про количество цифр.** Петя записал на доске 8 натуральных чисел. Известно, что для записи чисел на доске он использовал 19 цифр. Какое количество цифр может быть использовано для записи четвёртых степеней Петиних чисел?
26. **«Зажим между» и обратная функция.** Найдите все такие натуральные $n \geq 4$, что $n - 1$ делится на $[\sqrt{n}] + 1$, а $n + 1$ делится на $[\sqrt{n}] - 1$.
27. **Много равных между собой.** Пусть a_1, a_2, a_3, \dots — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а p_1, p_2, p_3, \dots — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n . Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа a_1, a_2, \dots простые.
28. Все натуральные делители числа n разбили на пары так, что сумма чисел в каждой паре — простое число. Докажите, что все эти простые различны.
29. **Взаимная простота.** Докажите, что из любых шести четырёхзначных чисел, взаимно простых в совокупности, всегда можно выбрать пять чисел, также взаимно простых в совокупности.

30. **Произведение взаимно простых чисел.** Натуральные числа a, b, c взаимно просты в совокупности и удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$. Докажите, что каждое из них — точный квадрат.

Геометрия

31. **Медиана треугольника и площадь.** Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.
32. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и N . В треугольниках ABM , MCN и AND провели медианы из вершин B , C и D соответственно. Докажите, что продолжения всех трёх медиан пересекаются в одной точке.
33. **Метод площадей.** Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри правильного n -угольника, до его сторон не зависит от выбора точки.
34. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O . Через вершину B провели прямую, параллельную стороне CD , а через вершину C — прямую, параллельную стороне AB . Эти прямые пересеклись в точке P , лежащей внутри треугольника AOD . Докажите, что $\angle AOP = \angle DOP$.
35. **Теорема о вписанном угле. Условие вписанности четырёхугольника.**
36. **Угол между касательной и хордой.**
37. **Теорема Помпею.** Вокруг правильного треугольника ABC описали окружность и на дуге AB , не содержащей точки C , отметили точку K . Докажите, что $CK = AK + BK$.
38. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка O так, что $\angle OAD = \angle OCD$. Докажите, что $\angle OBC = \angle ODC$.
39. **Степень точки относительно окружности.**
40. **Радикальные оси. Радикальный центр трёх окружностей.**
41. Докажите, что середины четырёх общих касательных к двум не пересекающимся окружностям лежат на одной прямой.
42. Касательные к описанной окружности Ω треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке P . Прямая, проходящая через P и параллельная AC , пересекает прямую AB в точке Q . Точка M — середина AQ . Докажите, что длина касательной из M к Ω равна PM .
43. **Свойства ортоцентра треугольника, связанные с описанной окружностью.**

44. **Единственность в геометрии.** Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD . Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на прямой CF , где F — проекция D на AB .

45. **Векторы. Операции с векторами. Коллинеарность векторов.**

46. Докажите, что если M точка пересечения медиан треугольника ABC , то

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$$

47. Доказательство существования прямой Эйлера с помощью векторов.

48. **Скалярное произведение векторов. Условие перпендикулярности.**

49. A, B, C, D — произвольные точки. Докажите, что

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} = \vec{0}.$$

50. В выпуклом четырёхугольнике провели отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон. Он разделил четырёхугольник на два, у каждого из которых равны диагонали. Докажите, что у исходного четырёхугольника также равны диагонали.

51. ABC — равносторонний треугольник с центром O . Докажите, что любой точки M верно равенство

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3 \cdot MO^2.$$

52. **Теорема Карно.**

Графы

53. **Усреднение в графах.** Докажите, что в любом графе можно удалить не более половины рёбер так, чтобы он стал двудольным.

54. Имеется 2027 лампочек, некоторые пары которых соединены проводами. Докажите, что можно так выбрать пару лампочек, что среди оставшихся найдутся хотя бы 1013, каждая из которых или соединена с обеими, или с обеими не соединена.

55. **Принцип крайнего в графах.** Назовём две вершины в графе *близкими*, если между ними существует путь, состоящий из не более 2 рёбер. Докажите, что в любом не пустом графе найдутся две близкие вершины одинаковой степени.

56. **Табличные графы.** В каждой строке и каждом столбце стоит по 2 фишки. Докажите, что можно снять часть фишек так, что в каждой строке и каждом столбце окажется по 1 фишке.

Пусть m — целое положительное число. Дана таблица $4m \times 4m$, состоящая из единичных клеток. Две различные клетки назовём *родственными*, если они находятся в одной строке или в одном столбце. Никакая клетка не является родственной для самой себя. Некоторые клетки были окрашены в синий цвет, при этом оказалось, что у каждой клетки таблицы не менее двух родственных ей синих клеток. Найдите наименьшее возможное количество синих клеток.

57. **Процессы на графе.** Дети посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.
58. **Связный граф. Связный орграф. Сильно связный орграф. Компоненты сильной связности.**
59. В ориентированном графе нет циклов. Докажите, что его вершины можно занумеровать так, что рёбра ведут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.
60. Петя и Вася играют в игру. Начинает Петя. Изначально дан пустой граф на n вершинах. За один ход разрешается провести одно ориентированное ребро. Запрещается проводить кратные ребра и ребро, если граф становится сильно связным. Проигрывает тот, кто не может делать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
61. **Турниры.** Докажите, что в полном ориентированном графе на $N \geq 7$ вершинах всегда найдётся ребро, развернув которое можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.
62. Даны $N > 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \dots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего номера к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовём *однотонной*, если нет двух таких точек A и B , что от A до B можно добраться и по красным стрелкам, и по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.

Разная комбинаторика

63. На плоскости отмечены 101 синяя и 101 красная точка, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Сумма всех 5050 попарных расстояний между красными точками равна 1, сумма всех 5050 попарных расстояний между синими точками также равна 1, а сумма всех 10201 расстояний от красной до синей точки равна 205. Докажите, что можно провести прямую, не проходящую через отмеченные точки и отделяющую все красные точки от всех синих.
64. Назовем билет с номером от 000000 до 999999 *отличным*, если разность

некоторых двух соседних цифр его номера равна 5. Найдите число отличных билетов.

65. Число размещений. Число сочетаний. Формулы.

66. С помощью комбинаторной интерпретации докажите формулу $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

67. С помощью комбинаторной интерпретации докажите формулу $C_n^0 \cdot C_n^m + C_n^1 \cdot C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_n^m \cdot C_{n-m}^0 = 2^m \cdot C_n^m$.

68. Выделенные множества. Какое наименьшее число прямоугольников 1×2 нужно вырезать из доски 8×8 так, чтобы из оставшейся фигуры нельзя было вырезать квадрат 2×2 ?

69. Какое наибольшее количество кораблей 1×3 можно поставить на доске для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть, не имели общих точек?

70. Числа от 2 до 100 изначально покрашены в белый цвет. Какое наименьшее количество чисел из этого набора можно покрасить в чёрный цвет так, чтобы любое белое число было делителем или кратным какого-то чёрного?

71. В языке племени АУ две буквы — «А» и «У». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не меньше одной и не больше 2025 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

72. Веса и заряды. В классе учатся m мальчиков и d девочек. У каждого мальчика есть хотя бы одна подруга, при этом у него количество подруг хотя бы вдвое больше, чем количество друзей у любой из его подруг. Докажите, что $d \geq 2m$.

73. Можно ли за круглым столом рассадить 12 человек и поставить 28 бутылок на стол так, чтобы между любыми двумя людьми стояла бутылка?

74. Кол-во информации. Имеется n бутылок с водой, в одной вода испорчена, и 10 мышей. Если мышь выпьет плохую воду, то ночью она умирает. Для какого наибольшего n можно гарантированно найти бутылку с испорченной водой за 6 дней?

75. У Марии Денисовны и Марии Вадимовны есть колода из k карт и по n конфет у каждой. Они загадали одну карту из колоды, Вадим Игоревич хочет ее отгадать. Он может разделить колоду на две кучки и одну кучку дать одной Марии, а другую — второй Марии. Та Мария, в кучке которой загаданная карта, съедает свою конфету. Когда у одной из Марий конфеты кончатся, Вадим должен назвать загаданную карту. При каком наибольшем k Вадим гарантированно отгадает?

- 76. Алгебраические конструкции в комбинаторике.** В соревнованиях «Слесарь Года» участвуют 81 слесарей. У каждого слесаря есть свой *разряд* — натуральное число, известное только ему. Разряды всех слесарей различны. В одном раунде участвуют три слесаря, и по итогам раунда выявляется победитель — обладатель высшего разряда. Расписание составляется заранее и по ходу соревнований не меняется. Какое наименьшее число раундов необходимо для выявления сильнейшего слесаря?
- 77. Лексикографический порядок.**
- 78.** Пусть есть бесконечная линейка из клеток вправо (есть клетка с любым натуральным номером), в ней в каких-то клетках лежит сколько-то монет (конечное число), за ход можем 2 монеты из одной клетки подвинуть в стороны (одну вправо, другую влево) на сколько-то клеток (можно на разное число).
Докажите что можно совершить конечное число действий, прежде чем закончатся ходы.
- 79. Триангуляция. Ухо триангуляции. Уши триангуляции выпуклого многоугольника при $n \geq 4$.**
- 80.** Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что никакие две соседние вершины не покрашены в один цвет и все цвета присутствуют. Докажите, что многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники, в каждом из которых все вершины разного цвета.
- 81.** Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.
- 82. Глобальные характеристики.** На новогоднем утреннике в ряд стоят l лисят и k крольчих. Каждого ребёнка спросили, сколько детей слева от него одеты в костюм другого вида. Чему может быть равна сумма чисел, названных детьми?
- 83.** В новогоднем подарке было несколько левых палочек Twix. Каждым действием либо добавляли одну правую палочку и записывали количество левых палочек на первый листок, либо убирали одну левую палочку и записывали количество правых палочек на второй листок. В итоге на столе остались только правые палочки Twix. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.
- 84. Важные моменты.** Каждый из 52 человек знает свою уникальную новость. Каждый из них может написать другому СМС со всеми известными ему новостями. Какое наименьшее число СМС нужно, чтобы каждый узнал все новости?
- 85.** В ряд записано N чисел. Каждую секунду робот выбирает какую-либо пару рядом стоящих чисел, в которой левое число больше правого, меняет

их местами и при этом умножает оба числа на 2. Докажите, что через некоторое время сделать очередную такую операцию будет невозможно.

- 86. 2 модели.** В Средиземье 1000 графств, в одном из которых находится волшебное Кольцо. Раз в день Маг может выбрать любое подмножество графств, и получить от волшебного Камня ответ, есть ли Кольцо в одном из этих графств. Камень может ошибиться, но никогда не ошибается два дня подряд. Маг может совершать данное действие некоторое количество дней, после чего он должен отправить гонцов в некоторые k графств, в одном из которых наверняка находится Кольцо. При каком наименьшем k Маг может это сделать?
- 87.** На столе 2026 ящичков, в каждом из которых лежит по одному мячу. Известно, что число белых мячей чётное положительное. Разрешается выбрать любые два ящичка и спросить, есть ли в них хотя бы один белый мяч. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно определить два ящичка, в которых лежат белые мячи?