

Вписанные углы

Факт 1. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

Факт 2. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

Факт 3. Если точки A, B, C, D лежат на окружности (именно в таком порядке), прямые AC и BD пересекаются в точке P , а прямые AB, CD пересекаются в точке Q , то $\angle APB$ равен полусумме дуг AB и CD , а $\angle AQP$ равен полуразности дуг AD и BC .

- (а) Докажите, что описанная окружность треугольника ABC , биссектриса угла B и серединный перпендикуляр к отрезку AC проходят через одну точку.

(б) Докажите, что описанная окружность треугольника ABC , биссектриса внешнего угла B и серединный перпендикуляр к отрезку AC проходят через одну точку.
- В окружности проведены две перпендикулярные хорды AB, CD , пересекающиеся в точке M . Докажите, что высота треугольника AMC и медиана треугольника BMD лежат на одной прямой.
- Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка T , что $\angle BTC = \angle BAC + 60^\circ$, $\angle CTA = \angle CBA + 60^\circ$, $\angle ATB = \angle ACB + 60^\circ$. Лучи AT, BT, CT продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC . Докажите, что полученные точки пересечения образуют равносторонний треугольник.
- (а) Высоты треугольника ABC продлили до пересечения с описанной окружностью в точках M, N, K . Докажите, что ортоцентр ABC совпадает с центром вписанной окружности MNK .

(б) Биссектрисы треугольника ABC продлили до пересечения с описанной окружностью в точках M, N, K . Докажите, что центр вписанной окружности ABC совпадает с ортоцентром MNK .
- В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB . На большем катете BC отметили точку D так, что $AC = BD$. Пусть E - середина дуги ACB . Найдите угол DEC .
- AB - хорда окружности ω с центром O . L - произвольная точка на хорде AB . Окружность, проходящая через точки O, A, L вторично пересекает ω в точке P . Докажите, что треугольник BLP равнобедренный.

7. В треугольнике ABC ($AB \leq BC$) проведена биссектриса AL . Перпендикуляр из точки L на прямую AC пересекает «меньшую» дугу AC описанной окружности ω треугольника ABC в точке D . Перпендикуляр из точки A на прямую BD пересекает сторону BC в точке K . Докажите, что точки D, K и середина «меньшей» дуги BC окружности ω лежат на одной прямой.
8. На прямой отметили точки $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ - именно в таком порядке. На отрезках $X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_9X_{10}$ как на основаниях построили равнобедренные треугольники с углом α при вершинах. Оказалось, что все эти вершины лежат на одной полуокружности с диаметром X_1X_{10} . Найдите α .