

Исследуем граф

0. Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.
1. В стране 20 городов, и из каждого в другие выходит не менее 16 дорог. Страну разбили на несколько частей так, что любая дорога соединяет два города из разных частей. Докажите, что частей не меньше пяти.
2. В стране живёт несколько рыцарей, каждые два из которых либо дружат, либо враждуют между собой, причём каждый имеет ровно n врагов. Все рыцари живут по принципу «Враг моего друга — мой враг». Как-то раз один рыцарь перебил всех своих врагов, после чего в живых осталось ровно 5 рыцарей. Докажите, что n делится на 5.
3. 38 попугаев передрались, измеряя рост удава. Каждый из них сумел выдрать одно перо из чьего-то хвоста, и у каждого попугая было выдрано одно перо. Кроме того, для любых трёх попугаев можно указать четвёртого, выдравшего перо у одного из них. Докажите, что для наведения порядка удав может проглотить не больше 6 попугаев, а остальных рассадить поровну в две клетки так, чтобы ни один попугай не попал в одну группу со своим обидчиком.
4. В компании 10 сотрудников. Известно, что любых 4 сотрудников можно разделить на две пары так, что в каждой паре сотрудники являются друзьями. Докажите, что найдутся 4 сотрудника, любые два из которых дружат.
5. В стране из каждого города выходит не менее трех дорог. Докажите, что король может совершить путешествие, проехав по четному количеству дорог, вернувшись в город, где началось путешествие, и не проехав ни по какой дороге дважды.
6. В графе между любыми двумя вершинами существует простой путь четной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует и простой путь нечетной длины.
7. В стране 100 городов, соединенных друг с другом дорогами так, что если любой город закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая закрытого, конечно). Докажите, что страну можно разбить на два государства, по 50 городов в каждом, так, что в обоих государствах из любого города можно доехать до любого.