

Средние линии и параллелограмм Вариньона

0. **Параллелограмм Вариньона.** На плоскости отмечены точки A, B, C, D . Докажите, что середины отрезков AB, BC, CD, DA образуют параллелограмм или лежат на одной прямой. Когда этот параллелограмм является прямоугольником? А ромбом? Квадратом?
1. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
2. В треугольнике ABC провели биссектрисы углов A и C . Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на эти биссектрисы. Докажите, что $DE \parallel AC$.
3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC . Найдите угол, образованный продолжениями сторон AB и CD .
4. Стороны AB, CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны. Через середины диагоналей AC, BD проведена прямая, пересекающая стороны AB, CD в точках M, N соответственно. Докажите, что $\angle BMN = \angle CNM$.
5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ середины сторон AB и CD, BC и DE соединены отрезками. K, L — середины этих отрезков. Доказать, что отрезок KL параллелен стороне AE . Чему он равен, если $AE = 12$?
6. Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = 42^\circ$ и $AB < AC$. Точка K на стороне AC такова, что $AB = CK$. Точки P, Q — середины отрезков AK, BC соответственно. Найдите угол ACB , если $\angle PQC = 120^\circ$.
7. Внутри квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник BCK . Прямые BK и CD пересекаются в точке P . Докажите, что отрезок, соединяющий середины отрезков KD и AP , равен половине стороны квадрата.
8. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB, BC и CA в точках M, N и K соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная NK , пересекает прямую MN в точке D . Прямая, проходящая через A и параллельная MN , пересекает прямую NK в точке E . Докажите, что прямая DE содержит среднюю линию треугольника ABC .