

Построение примеров в теории чисел.

1. Какие числа можно представить в виде суммы нескольких (двух или более) последовательных натуральных чисел?
2. Докажите, что уравнение $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = n^2$ имеет решение в различных натуральных числах для любого натурального k .
3. Существует ли натуральное число, которое можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел более чем миллионом способов? Ровно миллионом способов?
4. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 2025$ последовательных натуральных чисел.
5. Существуют ли такие натуральные $x, y, z > 2025 \cdot 2025$, что $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2 + 1$?
6. Докажите, что уравнение $x^2 + xy + y^2 = a^2 + 3b^2$ имеет решение в целых числах для любых целых a, b .
7. Существует ли набор из 1000 натуральных чисел таких, что НОДы всевозможных наборов этих чисел (по два, по три и т.д.) различны?