

Вспомогательная площадь.

- 0-1. Дан треугольник ABC . Докажите, что ГМТ X , для которых $S_{ABX} = S_{ACX}$, — прямая, содержащую медиану треугольника ABC , проведённую через вершину A .
- 0-2. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри правильного n -угольника, до его сторон не зависит от выбора точки.
1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC расстояние от вершины A до прямой CD равно длине стороны AB . Докажите, что расстояние от вершины D до стороны AB равно длине стороны CD .
 2. Внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$ отмечена точка P . Докажите, что $S_{ABP} + S_{CDP} + S_{EFP} = S_{BCP} + S_{DEP} + S_{FAP}$.
 3. На клетчатой плоскости нарисован многоугольник с вершинами в узлах сетки. При этом нет сторон, идущих по линиям сетки. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки, лежащих внутри многоугольника, равна сумме длин горизонтальных отрезков, лежащих внутри него.
 4. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и CC_1 , пересекающиеся в точке M . Оказалось, что четырёхугольник A_1BC_1M — описанный. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.
 5. Пусть R_1, R_2, R_3 — радиусы трёх окружностей, каждая из которых проходит через вершину треугольника и касается противоположной стороны. Докажите, что $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \leq \frac{2}{r}$, где r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.
 6. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O . Через вершину B провели прямую, параллельную стороне CD , а через вершину C — прямую, параллельную стороне AB . Эти прямые пересеклись в точке P , лежащей внутри треугольника AOD . Докажите, что $\angle AOP = \angle DOP$.

7. (а) Противоположные стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ площади S попарно не параллельны. Найдите геометрическое место точек X , лежащих внутри четырёхугольника, для которых $S_{ABX} + S_{CDX} = S/2$.
- (б) **Теорема Ньютона.** Докажите, что во всяком описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности расположены на одной прямой.
8. M — середина стороны BC треугольника ABC . Известно, что выполняется соотношение $AB = AC + AM$. Провели медиану AM , и она пересекает вписанную окружность треугольника в точках P и Q . Найдите угол PIQ , где I — центр вписанной окружности.
9. На высоте CH , проведённой из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC , как на диаметре построена окружность. Касательные из точек A и B , проведённые к окружности, пересекаются в точке P . Докажите, что касательная из P к окружности равна трети гипотенузы.