

Ориентированные графы.

Определение. Ориентированный граф называется связным, если он превращается в связный граф при «стирании» ориентации ребер. Ориентированный граф называется сильно связным, если от любой вершины до любой другой можно добраться, проходя по ребрам в правильном направлении.

Определение. Ориентированный граф, между каждыми двумя вершинами которого проведено ровно одно ориентированное ребро, называется турниром.

0. В ориентированном графе из каждой вершины ведет хотя бы 1 ребро. Докажите, что в таком графе есть цикл.

1. (а) В королевстве из любого города можно добраться до любого другого по дорогам с двусторонним движением. Докажите, что король может назначить некоторый город столицей и сделать все дороги односторонними так, что из столицы можно будет добраться до любого другого города.

(б) Пусть про королевство также известно, что число дорог, выходящих из каждого города, — четно. Докажите, что король может сделать все дороги односторонними так, что из любого города можно будет добраться до любого другого города.

2. Дан ориентированный граф без циклов. Докажите, что его вершины можно занумеровать так, что рёбра ведут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.

3. В некотором государстве 101 город. Каждый город соединён с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит (а) 50 (б) 40 дорог и из каждого города выходит (а) 50 (б) 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по (а) двум (б) трем дорогам.

Определение. Пару вершин v , u ориентированного графа будем называть связанной, если существуют пути из v в u и путь из u в v .

4. (а) Докажите, что любой ориентированный граф можно разбить на части (которые далее мы будем называть *компонентами сильной связности*) так, что пара вершин v , u связана, если и только если они находятся в одной компоненте сильной связности.

(б) Докажите, что компонента сильной связности сильно связна.

5. Некоторые города страны соединены авиалиниями, по которым в одном направлении летают самолеты. Известно, что есть город v , из которого нельзя попасть в город u . Докажите, что часть городов может отделиться так, что из оставшихся городов не будет ни одного перелета в отделившиеся.
6. В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины исходит хотя бы одно ребро, и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро (Разрешены кратные ребра). Докажите, что можно провести 100 ребер так, чтобы граф стал сильно связным.
7. (а) Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. Докажите, что в любом турнире найдётся царь.
(б) Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.
8. Среди n команд провели турнир по волейболу, где каждая команда сыграла с каждой ровно 1 раз, причём известно для любых команд A и D , если нашлись такие команды B и C , что команда A победила команды B и C , команда B победила команды C и D , а команда C победила команду D , то команда A обязательно одержала верх над командой D . Какое максимальное количество поражений могло быть у команды, занявшей первое место?