

Лемма о трезубце.

1. **Лемма о трезубце**, она же **лемма о трилистнике**, она же **лемма Мансиона**, она же **лемма о куриной лапке**.

Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D . Докажите, что D равноудалена от точек B, C, I, I_A , где I – центр вписанной окружности, а I_A – центр внеписанной, касающейся стороны BC .

2. **Внешняя лемма о трезубце**. Пусть I_B и I_C – центры внеписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон AC и AB соответственно. Тогда точки B, C, I_B, I_C лежат на одной окружности с центром в середине «большей» дуги BC описанной окружности треугольника ABC .

3. **Окружность Эйлера**: середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности.

(а) С помощью леммы о трезубце докажите, что в остроугольном треугольнике середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на описанной окружности ортотреугольника.

(б) С помощью внешней леммы о трезубце докажите, что в остроугольном треугольнике середины сторон лежат на описанной окружности ортотреугольника.

4.

5.

6. Окружность касается сторон AB, AC треугольника ABC в точках K и L соответственно, а также его описанной окружности. Докажите, что середина отрезка KL является центром вписанной окружности треугольника ABC .

4. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Отметили центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB, ABC . Докажите, что отмеченные точки являются вершинами прямоугольника.

5. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках B_0, C_0 . ω_B и ω_C с центрами B_0 и C_0 касаются отрезков AC и AB соответственно. Докажите, что и через точку A , и через точку I можно провести прямую, касающуюся обеих окружностей ω_B и ω_C .

6. На «меньших» дугах AB, AC описанной окружности треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $MNBC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACN равноудалены от середины дуги BAC .

7. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка M — середина AC , точка N — середина дуги ABC описанной окружности треугольника. Докажите, что $IM_A = IN_B$.