

## По мотивам ликбеза.

В этом листочке все переменные являются натуральными числами.

0. Доказать, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 0001.
1. (а) Докажите, что для любого нечётного натурального числа  $a$  существует такое натуральное число  $b$ , что  $2^b - 1$  делится на  $a$ .  
(б) Докажите, что существует число  $n$  такое, что  $2^n - 1$  имеет хотя бы 1000 различных простых делителей.
2. (а) Пусть  $x^a \equiv 1 \pmod n$  и  $x^b \equiv 1 \pmod n$ . Докажите, что  $x^{(a;b)} \equiv 1 \pmod n$ .  
(б) Пусть  $x^3 \equiv 1 \pmod{30}$ . Докажите, что  $x \equiv 1 \pmod{30}$ .  
(в) Пусть  $p$  – нечётное простое число. Докажите, что любой простой делитель числа  $2^p - 1$  имеет вид  $2kp + 1$ .
3. Докажите, что если  $x^2 + 1$  делится на нечётное простое  $p$ , то  $p = 4k + 1$ .
4. Пусть  $p$  – простое число. Напишем сначала  $p$  единиц, затем  $p$  двоек,  $p$  троек,  $p$  четверок,  $p$  пятерок,  $p$  шестерок,  $p$  семерок,  $p$  восьмерок и  $p$  девяток. Докажите, что полученное число при делении на  $p$  дает такой же остаток, что и число 123456789.
5. (а) Докажите, что  $1 + x + x^2 \not\equiv 0 \pmod{41}$  ни для какого целого  $x$ .  
(б) Докажите, что если  $1 + x + x^2 \equiv 0 \pmod p$  – простое, большее трёх, то  $p \equiv 1 \pmod 6$ .  
(в) Докажите, что простых чисел вида  $6n + 1$  бесконечно много.
6. Рассмотрим такое  $n$ , что  $\phi(n)$  – это уникальное значение функции Эйлера (то есть принимаемое только при этом  $n$ ).  
(а) Докажите, что  $n$  делится на 36.  
(б) Докажите, что  $n$  делится на 43.
7. Пусть  $p$  – простое число. Докажите, что  $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv -1 \pmod p$  тогда и только тогда, когда  $p$  – простое вида  $p = 4k + 1$ .
8. (а) Найдите все такие натуральные  $k$ , что произведение первых  $k$  простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей чем первая).  
(б) Найдите все такие натуральные  $k$ , что произведение первых  $k$  нечётных простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).