

Теорема Карно.

Перпендикуляр как ГМТ: Принцип Карно. Пусть заданы точки A, B и число c . ГМТ X , для которых $AХ^2 - ВХ^2 = c$ — прямая, перпендикулярная прямой AB .

Теорема Карно. Перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, CA, AB треугольника ABC , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$.

1. В шестиугольнике $ABCDEF$ углы A и C — прямые, $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Докажите, что прямые DF и BE перпендикулярны.
2. Пусть перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, AC и AB соответственно, пересекаются в одной точке. Докажите, что и перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C на прямые соответственно B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 , также пересекаются в одной точке.
3. Дан треугольник. Из точек касания трёх вневписанных окружностей восстановили перпендикуляры к тем сторонам, которых эти окружности касаются. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.
4. Через вершины B и C треугольника ABC перпендикулярно прямой BC проведены прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB пересекают прямые b и c соответственно в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC .
5. Вокруг треугольника ABC описана окружность, A_1 — точка её пересечения с прямой, проходящей через A параллельно BC . Аналогично заданы точки B_1, C_1 . Докажите, что перпендикуляры из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке.
6. Точки A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров из вершин A, B, C треугольника ABC на прямую l . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A_1, B_1, C_1 на BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке.
7. Треугольник ABC — правильный, P — произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, проведённые из центров вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCA на прямые AB, BC, CA соответственно, пересекаются в одной точке.
8. Дан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. С помощью теоремы Карно докажите, что перпендикуляры, опущенные из середин сторон AB и AD на соответственно противоположные стороны, пересекаются на прямой AC .