Формула включений-исключений.

Для любого набора конечных множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ верна формула включений-исключений:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$
$$- \sum_{i<j<k<l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

Пример использования. Пусть $\phi(n)$—количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Пусть $p_1, p_2, ..., p_k$ — набор простых делителей числа n. Докажите, что $\phi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{p_k})$.

1. **(а)** Сколько способов рассадить 50 кроликов по четырем клеткам так, чтобы в каждой клетке сидел хотя бы один кролик? Все кролики — разные.
   (б) Докажите, что для натуральных $m < n$ верно $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m C_n^k = 0$.

2. Найдите количество 10-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 87.

3. Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.

4. **(а)** Докажите, что для любого натурального m выполнено равенство $C_m^1 - C_m^2 + ... + (-1)^m C_m^m = 1$.
   (б) Докажите формулу включений-исключений.

5. В группе n учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на своё место?

6. На плоскости расположено n фигур. Пусть S_i—сумма площадей всех частей плоскости, являющихся пересечением каких-то i фигур, а S—площадь объединения этих фигур. Докажите, что $S \geqslant S_1 - S_2 + ... + (-1)^{k+1} S_k$ при чётном k и $S \leqslant S_1 - S_2 + ... + (-1)^{k+1} S_k$ при нечётном.

7. На кафтане площадью 1 размещены 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $1/2$. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $1/5$.