

Задачи про C -шки

Во всех задачах предполагается, что у C -шек индексы неотрицательные и верхний не превосходит нижний.

Идея. Многие интересные формулы для C -шек можно получить комбинаторно, придумав и решив "свою задачу" двумя разными способами.

0. (а) Докажите тождество $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$. Для этого двумя способами решите задачу: "У Леша n друзей. Он хочет пригласить на день рождения некоторых из них. Сколько у него способов?"
 (б) Чему равно $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2k} + \dots$? Какую задачу нужно придумать здесь?
 (в) Докажите свойство числа сочетаний $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Используйте задачу: "Есть $n+1$ человек, среди них Петя. Сколькими способами можно выбрать k человек?"
1. Докажите равенства:
 (а) $C_{n-1}^{k-1} \cdot C_n^{k+1} \cdot C_{n+1}^k = C_{n-1}^k \cdot C_{n+1}^{k+1} \cdot C_n^{k-1}$;
 (б) $C_r^m \cdot C_m^k = C_r^k \cdot C_{r-k}^{m-k}$.
2. Докажите равенства (постарайтесь сделать это комбинаторным способом!):
 (а) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$;
 (б) $C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \dots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+m}^k$;
 (в) $C_n^0 \cdot C_n^m + C_n^1 \cdot C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_n^m \cdot C_{n-m}^0 = 2^m \cdot C_n^m$;
 (г) $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + \dots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.
3. Вычислите сумму $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots + C_{n-k}^k + \dots$
4. Никакие три диагонали выпуклого 2025-угольника не пересекаются в одной точке. Докажите, что количество треугольников, вершины которых лежат внутри многоугольника, а стороны — на его диагоналях, кратно 7.
5. Есть ли такие натуральные числа $k < m < n$, что $\text{НОД}(C_n^k, C_n^m) = 1$?
6. Что больше: количество 2025-значных чисел из единиц и двоек, в которых ровно 1012 единиц, или количество 1010-значных чисел из единиц, двоек и троек (необязательно все виды цифр используются в каждом числе)?