Метод Штурма

Метод Штурма. Одновременное изменение двух переменных с сохранением параметра (обычно суммы или произведения) так, чтобы при этом модуль разности частей неравенства уменьшался.

Важные леммы. Пусть $0 < a < c \leqslant d < b$. Тогда

- $ab < cd$, если $a + b = c + d$
- $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$, если $a + b = c + d$
- $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{c} + \sqrt{d}$, если $a + b = c + d$
- $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}$, если $a + b = c + d$
- $a + b > c + d$, если $ab = cd$
- $\frac{a}{b} \leqslant \frac{a+x}{b+x}$, если $x > 0$

0.0. Докажите всю цепочку неравенства о средних с помощью метода Штурма.

0.1. Докажите, что
$$a^2b + b^2c + c^2a \leqslant 4$$
если $a + b + c = 3$ и $a, b, c \geqslant 0$.

1. Докажите, что для любых $x_1, x_2 \ldots, x_n > 0$ с произведением 1 верно неравенство
$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geqslant 2^n$$

2. Найдите максимальное значение выражения
$$\sqrt{1 + 5x} + \sqrt{1 + 5y} + \sqrt{1 + 5z}$$
при условии, что $x + y + z = 1$.

3. Докажите, что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ с суммой 1 верны неравенства

(а)
$$x_1 x_2 \cdot \ldots x_n \leqslant \frac{1}{n^n}$$

(б)
$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant (n + 1)^n$$

(в)

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \geqslant (n-1)^n$$

(г)

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\cdot\ldots\cdot+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}$$

4. Докажите, что для любых положительных x и y верно

$$\frac{1}{x+y+2}-\frac{1}{(x+1)(y+1)} \leqslant \frac{1}{16}.$$

5. Докажите, что $0 \leqslant xy+yz+zx-2xyz \leqslant \frac{7}{27}$, при $x, y, z \geqslant 0$ и $x+y+z=1$.

6. **(а)** Докажите, что при $x_1, \ldots, x_n \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{1+x_1}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}}.$$

(б) Докажите, что если все x_i принадлежат отрезку $[0,1]$, то выполняется неравенство с противоположным знаком.

7. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$$