Планарные графы.

Определение. Граф называется плоским (или планарным), если его можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер.

Ключевые формулы при работе с плоскими графами:
$2E = V_1 + 2V_2 + ... + kV_k$, где V_i – количество вершин степени i. Верна для любого графа.
$2E = 3F_3 + 4F_4 + ... + kF_k$, где F_i – количество граней, ограниченных i ребрами. Верна только для плоского графа.

0. **Формула Эйлера.** Докажите, что в любом связном плоском графе выполняется соотношение $V + F = E + 2$, где V – количество вершин, F – количество граней(считая внешнюю грань!), а E – количество ребер графа. Как обобщить формулу для несвязных графов?

1. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

2. Докажите следующие формулы для плоских графов:
(а) $2E \geq 3F$,
(б) $E \leqslant 3V - 6$.
(в) Докажите, что полный граф на 5 вершинах не плоский.

3. **(а)** Докажите, что для двудольного плоского графа верно $E \geq 2F$.
(б) Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф живут каждый в своем домике. Недалеко от них расположены три колодца: с водой, с молоком и с мёдом. Однажды поросята поссорились, и теперь не хотят видеть друг друга. Смогут ли они проложить дорожки от каждого домика к каждому колодцу так, чтобы дорожки не перескались?

4. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, – не плоский.

5. Фуллерен — это граф, все степени вершин которого равны 3, а все грани — это пяти и шестиугольники (например, футбольный мяч). Найдите количество пятиугольных граней у фуллеренов.

6. На плоскости проведено n различных окружностей так, что каждые две из них пересекаются в двух точках и никакие три из них не имеют общей точки. Докажите, что окружности разбивают плоскость на $n^2 - n + 2$ частей.

7. Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

8. Семиугольник разбит на выпуклые пяти и шестиугольники, причём так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.

9. **(а)** Можно ли разрезать какой-нибудь выпуклый четырёхугольник на выпуклые пятиугольники?

(б) Можно ли разрезать какой-нибудь выпуклый пятиугольник на выпуклые шестиугольники?