Симметрия ортоцентра и Эйлер.

В задачах далее дан треугольник ABC с ортоцентром H, центром описанной окружности O, точкой пересечения медиан G, высотами AA_1, BB_1, CC_1, серединами C_0, B_0, A_0 сторон AB, AC, CB, Q – точка, симметричная H относительно C_0, P – точка, симметричная H относительно AB.

1. Докажите, что точка, симметричная точке C_1 относительно стороны BC, лежит на прямой A_1B_1.

2. **(а)** Докажите, что P лежит на описанной окружности треугольника ABC.
(б) Докажите, что Q лежит на описанной окружности треугольника ABC.
(в) Докажите, что CQ – диаметр.
(г) Докажите, что $CH^2 + AB^2 = 4R^2$.
(д) Докажите, что $CH = AB \cdot ctg\angle C$
(е) Докажите, что $CH = 2OC_0$.

3. **(Прямая Эйлера)** Докажите, что точки O, G, H лежат на одной прямой. В каком порядке? Какое отношение между ними?

4. **(Окружность Эйлера)** Докажите, что точка O_9, являющаяся серединой отрезка OH, равноудалена от середин сторон, оснований высот и середин отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром.

5. В окружность с центром O вписан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что расстояние от O до стороны четырехугольника равно половине его противоположной стороны.

6. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке X. Докажите, что XH проходит через A_0.

7. Пусть K – основание перпендикуляра, опущенного из точки H на касательную к описанной окружности треугольника ABC, проведенной в точке A. Докажите, что треугольник AA_0K — равнобедренный.

8. BH пересекает A_1C_1 в точке X, а луч BO пересекает сторону AC в точке Y. Докажите, что $XY \| HB_0$.