Неравенство о средних

Для положительных чисел выполняется неравенство:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}.$$

1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+c^2b+b^2a) \geq 9a^2b^2c^2.$$

2. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 1. Найдите максимум выражения $\sqrt{1+4a}+\sqrt{1+4b}+\sqrt{1+4c}+\sqrt{1+4d}$.

3. Произведение положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ равно 1. Докажите, что $(2+a_1)(2+a_2)...(2+a_n) \geq 3^n$.

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \geq \frac{3}{2}.$$

5. Для положительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ докажите неравенство

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4+...+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 \geq \frac{x_1}{x_5}+\frac{x_2}{x_6}+...+\frac{x_{n-3}}{x_1}+\frac{x_{n-2}}{x_2}+\frac{x_{n-1}}{x_3}+\frac{x_n}{x_4}$$

6. Про положительные числа x, y, z известно, что $xy^2z^3 = 108$. Найдите наименьшее значение $x+y+z$.

7. Для положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ докажите неравенство

$$(n+1)\cdot \sqrt[n+1]{a_1a_2...a_na_{n+1}} - n\cdot \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \leqslant a_{n+1}.$$

8. Для положительных чисел x, y, z выполнено условие $xy+yz+zx = 27$. Докажите, что

$$x+y+z \geq \sqrt{3xyz}.$$

9. Известно, что $x_1^2+...+x_6^2 = 6$ и $x_1+...+x_6 = 0$. Докажите, что $x_1 \ldots x_6 \leqslant \frac{1}{2}$.