

Табличные графы.

Ключевая идея. Таблицу можно рассмотреть как двудольный граф, в котором одна доля является столбцами, а вторая строками. Ребром будем соединять строку и столбец, на пересечении которых происходит что-то интересное для задачи.

Но это не единственный способ превратить таблицу в граф.

0. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены звездочкой. Известно, что для любой отмеченной клетки число звездочек в ее столбце равно числу звездочек в ее строке. Докажите, что число столбцов, в которых есть хотя бы одна звездочка, равно числу строк, в которых есть хотя бы одна звездочка.
1. В каждой строке и каждом столбце стоит по 2 фишки. Докажите, что можно снять часть фишек так, что в каждой строке и каждом столбце окажется по 1 фишке.
2. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на шахматной доске так, чтобы центры никаких трёх клеток не образовывали прямоугольный треугольник?
3. В таблице $m \times n$ некоторые клетки закрашены. Можно выбрать прямоугольник в таблице и закрасить его угловую клетку, если три другие угловые клетки уже закрашены. Какое наименьшее количество закрашенных клеток должно быть в таблице изначально, чтобы такими действиями получилось закрасить всю таблицу?
4. На пустой шахматной доске ставят пешки по следующим правилам: выбирают любые четыре пустые клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски, после чего на одну из этих клеток ставится пешка. Затем выбирают аналогичные четыре пустые клетки, на одну из них снова ставят пешку, и так далее. Какое наибольшее число пешек можно поставить на доске по этим правилам?
5. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно две клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?
6. В таблице отмечено несколько клеточек. Докажите, что их можно покрасить в синий и красный цвета так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце разница между количеством синих и красных клеточек была бы не более 1.