Индукция в графах.

Ключевая идея. В графах нельзя применять индукцию, делая переход от k к $k+1$. Схема индукции должна быть следующей: рассмотрим граф на $k+1$ вершине, удовлетворяющий условиям. Удалим из него одну вершину так, чтобы граф, который получился, тоже удовлетворял условиям. А в нем предположение индукции уже работает.
Самая сложная часть — понять, какую вершину можно удалить. Для этого иногда нужно применять принцип крайнего — попробовать удалить вершину самой большой или самой маленькой степени и т.д.

0.1. В компании из $n > 3$ человек у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

0.2. Рёбра дерева окрашены в два цвета. За один ход можно выбрать какую-то вершину, в которую приходят рёбра только одного цвета, и перекрасить все эти рёбра в противоположный цвет. Докажите, что за несколько ходов можно сделать все дерево одноцветным.

1. Дан полный ориентированный граф на $n > 2$ вершинах. Докажите, что можно поменять ориентацию не более чем на одном ребре так, чтобы граф стал сильно связным.

2. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

3. На танцы девушек пришло больше, чем юношей. Известно, что все девушки танцевали с разным числом юношей, а все юноши – с одинаковым числом девушек. Сколько всего человек могло прийти на танцы?

4. В одной компании среди любых четырех человек есть знакомый с тремя остальными. Докажите, что есть человек, который знает всех.

5. В графе $2n$ вершин и не меньше $n^2 + 1$ рёбер. **(а)** Докажите, что в нём есть цикл длины три. **(б)** Докажите, что в нем не менее n циклов длины три.

6. Каждые два из n городов соединены одной ориентированной синей или красной дорогой. Докажите, что найдётся такой город, из которого в любой другой город можно проехать по одноцветному пути.