

Телескопические суммы.

0. (а) Найдите сумму $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$.

(б) Найдите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

(в) Вычислите

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{2021 \cdot 2025}$$

Идея. Для того чтобы посчитать сумму $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, можно подобрать вспомогательную последовательность b_i такую, что $a_1 = b_2 - b_1, a_2 = b_3 - b_2, \dots, a_n = b_{n+1} - b_n$. Тогда $S = b_{n+1} - b_1$.

1. (а) Найдите сумму

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$$

(б) Вычислите

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2023}{2024!}$$

2. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

3. Пусть F_k - k -ое число Фибоначчи.

(а) Найдите сумму $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}$.

(б) Найдите сумму $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n$.

(в) Найдите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{F_n}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}.$$

4. Вычислите

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{3}{5^2 \cdot 7^2} + \dots + \frac{1012}{2023^2 \cdot 2025^2}$$

5. (а) Найдите сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

(б) Найдите сумму $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

(в) Докажите, что сумму $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ для каждого натурального k можно представить в виде многочлена от переменной n степени $k + 1$ с рациональными коэффициентами.

6. (а) Найдите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n}$$

(б) Докажите, что

$$\frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{11}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{3n+2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} < 2$$

7. Найдите сумму

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{21} + \frac{6}{91} + \dots + \frac{2n}{n^4 + n^2 + 1}$$

8. Докажите, что для чётного n выполнено равенство

$$\frac{1}{C_n^0} - \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} - \frac{1}{C_n^3} + \dots + \frac{1}{C_n^n} = \frac{2n+2}{n+2}$$