Площади-2

0. Прямая пересекает основание AC равнобедренного треугольника ABC в точке D, боковую сторону AB в точке E и луч CB в точке F, причем $\angle ADE = \angle CDB$. Докажите, что площади треугольников BCE и AEF равны.

1. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC отмечены точки P, Q, R соответственно так, что отрезки AQ, BR, CP пересекаются в точке M. Оказалось, что $S_{AMP} = S_{AMR}$, $S_{BMP} = S_{BMQ}$, $S_{CMQ} = S_{CMR}$. Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

2. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle ABC = \angle CDE = 90°$, $BC = CD = AE = 1$, $AB + DE = 1$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

3. Биссектрисы AD, BE, CF треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $S_{BIF} = S_{BID}$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

4. Пусть ABC — остроугольный треугольник, C' и A' — произвольные точки на сторонах AB и BC соответственно, M — середина стороны AC. Докажите, что площадь треугольника $A'C'M$ не больше половины площади треугольника ABC.

5. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC \neq AC$. На стороне AB выбрана точка E, на продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $\angle BDC = \angle ACE$. Докажите, что площади треугольников DEC и ABC равны.

6. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. На диагонали AC выбрана точка P. Оказалось, что $S_{PAE} = 28$, $S_{PCD} = 7$. Найдите S_{ABCDEF}.

7. Пусть M и N — середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P, а отрезки CN и DM — в точке Q. Докажите, что сумма площадей треугольников ABP и CDQ равна площади четырехугольника $MPNQ$.

8. На описанной окружности остроугольного треугольника ABC отмечены такие точки D и E, что $BD \perp AC$, AE — диаметр. Докажите, что $S_{ABC} = S_{AECD}$.