

Неравенства с условиями.

0-1. Числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что

$$(2 + a)(2 + b) \geq cd.$$

0-2. Для положительных чисел a, b, c с суммой 1 докажите неравенство

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \leq 2$$

1. Сумма квадратов четырех чисел a, b, c, d равна 1. Докажите, что

$$(1 - a)(1 - b) \geq cd.$$

2. Сумма положительных чисел a, b не больше двух. Докажите, что

$$\frac{a}{b + ab} + \frac{b}{a + ab} \geq 1.$$

3. Сумма чисел a_1, a_2, a_3 , каждое из которых больше 1, равна S , причем $\frac{a_i^2}{a_i - 1} > S$ для любого $i = 1, 2, 3$. Докажите, что $\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1$.

4. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2 - bc + 1} + \frac{1}{b^2 - ac + 1} + \frac{1}{c^2 - ab + 1} \geq 3.$$

5. Положительные числа x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше двух. Докажите, что

$$\sqrt{xy + 1} + \sqrt{yz + 1} + \sqrt{zx + 1} > x + y + z.$$

6. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

7. Сумма неотрицательных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите, что

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) \leq 8.$$

8. Известно, что $x_1^2 + \dots + x_6^2 = 6$ и $x_1 + \dots + x_6 = 0$. Докажите, что $x_1 \dots x_6 \leq \frac{1}{2}$.

9. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 1. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d}{(a + b + c)^3} + \frac{b^2 + c^2 + d^2 + a}{(b + c + d)^3} + \frac{c^2 + d^2 + a^2 + b}{(c + d + a)^3} + \frac{d^2 + a^2 + b^2 + c}{(d + a + b)^3} > 4.$$

7. Сумма неотрицательных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите, что

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) \leq 8.$$

8. Известно, что $x_1^2 + \dots + x_6^2 = 6$ и $x_1 + \dots + x_6 = 0$. Докажите, что $x_1 \dots x_6 \leq \frac{1}{2}$.

9. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 1. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d}{(a + b + c)^3} + \frac{b^2 + c^2 + d^2 + a}{(b + c + d)^3} + \frac{c^2 + d^2 + a^2 + b}{(c + d + a)^3} + \frac{d^2 + a^2 + b^2 + c}{(d + a + b)^3} > 4.$$

7. Сумма неотрицательных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите, что

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) \leq 8.$$

8. Известно, что $x_1^2 + \dots + x_6^2 = 6$ и $x_1 + \dots + x_6 = 0$. Докажите, что $x_1 \dots x_6 \leq \frac{1}{2}$.

9. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 1. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d}{(a + b + c)^3} + \frac{b^2 + c^2 + d^2 + a}{(b + c + d)^3} + \frac{c^2 + d^2 + a^2 + b}{(c + d + a)^3} + \frac{d^2 + a^2 + b^2 + c}{(d + a + b)^3} > 4.$$