Усреднение.

Идея. Если среднее значение некоторой величины по всем ситуациям равно k, то найдется ситуация, в которой она не меньше k, а также ситуация, в которой она не больше k.

0. В парке по кругу стоят 16 деревьев. На этих деревьях сидит 93 птицы. Докажите, что найдутся 5 подряд идущих деревьев, на которых в сумме сидят, по крайней мере, 30 птиц.

1. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.

2. На столе лежат 6 часов со стрелками. Все они показывают целое, но, возможно, различное количество часов (от 0 до 11). Разрешается любые несколько из них перевести вперёд. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

3. По краю круглого стола равномерно расставлены 20 табличек «технарь» и 20 табличек «гуманитарий». 20 технарей и 20 гуманитариев в случайном порядке сели за стол. Если у кого-то табличка не соответствует складу ума, то он обижается. Какого наименьшего количества обидевшихся можно гарантированно добиться поворотом стола?

4. На плоскости отмечено 40 точек. Сумма площадей всех треугольников с вершинами в этих точках равна 9. Докажите, что можно стереть половину точек так, чтобы сумма площадей оставшихся треугольников была не менее 1.

5. В таблице 20×20 в каждой клетке стоит крестик или нолик, причем в каждом столбце ровно 10 крестиков и 10 ноликов. Докажите, что можно найти две строки, которые совпадают, по крайней мере, в 10 позициях.

6. В зачете принимали участие 100 учеников и 15 преподавателей. Каждый преподаватель ставил “зачет” или “незачет” каждому ученику. Докажите, что найдется пара преподавателей, которые поставили одинаковые оценки хотя бы 47 ученикам.

7. По кругу стоят 400 детей из 20 отрядов, в каждом из которых 20 детей. Докажите, что можно в каждом отряде выбрать командира так, чтобы никакие два командира не стояли рядом.

8. Докажите, что для любого натурального $n \geq 3$ существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.