

Целая и дробная часть

Определение. Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x . Дробной частью $\{x\}$ называется число $x - [x]$.

Свойства.

- $x - 1 < [x] \leq x$
- $[x] \leq x < [x] + 1$
- $0 \leq \{x\} < 1$
- $[x] + [y] \leq [x + y]$
- если $[x] = [y]$, то $|x - y| < 1$

1. Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = x^2$.
2. Решите уравнение $\{2\{2x\}\} = x$.
3. Решите уравнение $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5}$.
4. (а) Докажите, что $[x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]$.
(б) Докажите, что для произвольного x и натурального n верно

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

5. Известно, что $\{x\} + \{\frac{1}{x}\} = 1$.
(а) Может ли x быть рациональным?
(б) Может ли x быть действительным?
6. Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей.
7. Найдите все возможные наборы из 2025 ненулевых вещественных чисел, для которых дробная часть каждого из этих чисел равна сумме остальных 2024 чисел.
8. Докажите, что для любого натурального n верно
(а) $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$.
(б) $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}] = [\sqrt{9n+8}]$.