Делители числа.

Определение. *Собственным* делителем числа называется натуральный делитель этого числа, не равный самому числу.

Основные приёмы решения задач про делители:

- разбить делители на пары, произведение в которых равно рассматриваемому числу;
- перейти от рассмотрения делителя к его парному делителю;
- рассмотреть наибольший/наименьший простой делитель.

1. Пусть $d(n)$ — количество натуральных делителей числа n.

(а) Докажите, что $d(ab) \leqslant d(a) \cdot d(b)$ для любых натуральных a, b.

(б) Докажите, что $d(ab) \geq d(a) + d(b) - 1$ для любых натуральных a, b.

В каких случаях выполняется равенство?

2. Натуральное число N имеет больше 1200 делителей. Все эти делители записали на доске. Саша стер 300 наибольших и 300 наименьших из них. Среди оставшихся чисел оказалось поровну четных и нечетных. Докажите, что среди всех делителей тоже поровну четных и нечетных.

3. У натурального числа n ровно 1000 делителей. Их выписали в порядке возрастания. Оказалось, что любые два соседних числа имеют разную четность. Докажите, что в числе n более 150 цифр.

4. Найдите все натуральные числа n, для которых сумма квадратов всех их собственных делителей равна $2n + 2$.

5. Наибольший собственный делитель натурального числа n равен $d > 1$. Может ли наибольший собственный делитель числа $n+2$ быть равен $d+2$?

6. Пусть $a > b > c > 1$ — три наибольших собственных делителя числа. Сколько существует чисел, не превосходящих полтора миллиона, для которых $a = b + c$?

7. Дано натуральное число n. На доске выписаны все натуральные числа от 900...00 до 1200...00 (оба числа оканчиваются на n нулей). У каждого из них выбрали собственный делитель. Докажите, что хотя бы два из этих делителей совпадают.

8. Натуральное число имеет ровно миллион делителей. Они выписаны в порядке убывания. Какое наименьшее возможное количество делителей может иметь 250-ое число в этом списке?