

Алгебраические преобразования

1. Три различных числа a, b, c подобраны так, что выполнены равенства $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2025$. Чему может быть равно $c^2(b+a)$?
2. В трех клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трех разных непустых клеток и записать в пустую клетку число $ab + c^2$. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трех исходных чисел.
3. Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?
4. Положительные числа a, b, x, y таковы, что $x^2 - x + 1 = a^2$, $y^2 + y + 1 = b^2$ и $(2x - 1)(2y + 1) = 2ab + 3$. Докажите, что $x + y = ab$.
5. Ненулевые вещественные числа a, b и c таковы, что $a^2 + a = b^2$, $b^2 + b = c^2$, $c^2 + c = a^2$. Докажите, что $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.
6. Про числа x_1, x_2, \dots, x_{100} известно, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{100}} = 10$ и

$$\frac{x_1}{x_2(2x_1 + x_2)} + \frac{x_2}{x_3(2x_2 + x_3)} + \dots + \frac{x_{100}}{x_1(2x_{100} + x_1)} = 13.$$

Чему может быть равно

$$\frac{x_2}{x_1(2x_1 + x_2)} + \frac{x_3}{x_2(2x_2 + x_3)} + \dots + \frac{x_1}{x_{100}(2x_{100} + x_1)}?$$

7. Докажите, что для произвольных a, b, c равенство

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} = 0.$$

8. Дана последовательность положительных вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$, в которой $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_{n+1} = a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-3}^2$ при всех $n \geq 3$. Найдите a_3 , если известно, что $\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_{2016}+1} + \frac{1}{a_{2017}} = 1$.