

## Алгебраические преобразования

1. Три различных числа  $a, b, c$  подобраны так, что выполнены равенства  $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2025$ . Чему может быть равно  $c^2(b+a)$ ?
2. В трех клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбирать числа  $a, b, c$  из трех разных непустых клеток и записать в пустую клетку число  $ab + c^2$ . Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трех исходных чисел.
3. Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?
4. Положительные числа  $a, b, x, y$  таковы, что  $x^2 - x + 1 = a^2$ ,  $y^2 + y + 1 = b^2$  и  $(2x-1)(2y+1) = 2ab + 3$ . Докажите, что  $x+y = ab$ .
5. Ненулевые вещественные числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $a^2 + a = b^2$ ,  $b^2 + b = c^2$ ,  $c^2 + c = a^2$ . Докажите, что  $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$ .
6. Про числа  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  известно, что  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{100}} = 10$  и

$$\frac{x_1}{x_2(2x_1+x_2)} + \frac{x_2}{x_3(2x_2+x_3)} + \dots + \frac{x_{100}}{x_1(2x_{100}+x_1)} = 13.$$

Чему может быть равно

$$\frac{x_2}{x_1(2x_1+x_2)} + \frac{x_3}{x_2(2x_2+x_3)} + \dots + \frac{x_1}{x_{100}(2x_{100}+x_1)} ?$$

7. Докажите, что для произвольных  $a, b, c$  равенство

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} = 0.$$

8. Данна последовательность положительных вещественных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ , в которой  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  и  $a_{n+1} = a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + \dots + a_1^2$  при всех  $n \geq 3$ . Найдите  $a_3$ , если известно, что  $\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_{2016}+1} + \frac{1}{a_{2017}} = 1$ .