Дорешка сложных задач.

1. Функция $f(x)$ определена на множестве натуральных чисел и принимает натуральные значения. Известно, что для любого натурального n выполнено $f(n+1) > f(n)$ и $f(f(n)) = 3n$. Найдите $f(2024)$.

2. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами $(i;j)$ и добавить по фишке в узлы $(i+1;j)$ и $(i;j+1)$ при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.
а) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.
б) Докажите, что если изначально в узле $(0;0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

3. На плоскости расположены $n > 1$ окружностей радиуса 1, причём известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что существует хотя бы n различных точек пересечения этих окружностей.

4. В стране 100 городов, соединенных друг с другом дорогами так, что если любой город закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая закрытого, конечно). Докажите, что страну можно разбить на два государства, по 50 городов в каждом, так, что в обоих государствах из любого города можно доехать до любого.

5. Дмитрий Александрович вычислил остатки при делении одного и того же натурального числа на $2, 3, 4, \ldots, 99, 100$. Среди остатков встретились все числа из набора $\{0, 1, 2, \ldots, 99\}$, за исключением одного ненулевого числа k. Определите наименьшее возможное значение числа k.

6. Докажите, что для чётного n выполнено равенство

$$\frac{1}{C_n^0} - \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} - \frac{1}{C_n^3} + \ldots + \frac{1}{C_n^n} = \frac{2n+2}{n+2}$$

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках M, N и K соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная NK, пересекает прямую MN в точке D. Прямая, проходящая через A и параллельная MN, пересекает прямую NK в точке E. Докажите, что прямая DE содержит среднюю линию треугольника ABC.