Распределение весов

Во всех задачах некоторым объектам нужно присвоить веса и посмотреть, что происходит с этими весами при указанных в условии операциях, либо посмотреть на веса двумя разными способами.

0. В некоторые клетки прямоугольной клетчатой доски поставили фишки, при этом в каждой клетке стоит не более одной фишки. Известно, что для любой клетки, в которой есть фишка, количество фишек в её столбце равно количеству фишек в её строке. Докажите, что число строк доски, содержащих фишки, равно числу столбцов, содержащих фишки.

1. У каждого из восьмиклассников в школе, не больше 20 друзей. Докажите, что их можно разделить на две группы 8-1 и 8-2 так, чтобы у каждого человека в группе 8-1 было не больше 15 друзей внутри группы, а у каждого человека в группе 8-2 было не больше 5 друзей внутри группы.

2. На бесконечной в одну сторону полоске клеток, пронумерованных натуральными числами, лежит несколько фишек (возможно несколько в одной клетке). Расположение фишек называется конечным, если в этом состоянии невозможно выполнить операцию.
(а) За одну операцию разрешается снять две фишки с клетки с номером k и добавить одну в клетку с номером $k+1$. Докажите, что конечное расположение для фиксированного начального положения фишек единственно.
(б) За одну операцию разрешается снять две фишки с клеток с номером k и $k+1$ и добавить одну в клетку с номером $k+2$. Докажите, что конечное расположение, в котором на каждой клетке лежит не более одной фишки, единственно.

3. **(а)** Несколько камней разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.
(б) На полках стоят банки с вареньем, причем ровно k полок пусты. Банки переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k+1$ банка, которая теперь стоит на полке с меньшим количеством банок, чем раньше.

4. В классе учатся m мальчиков и d девочек. У каждого мальчика есть хотя бы одна подруга, при этом у него количество подруг хотя бы вдвое больше, чем количество друзей у любой из его подруг. Докажите, что $d \geqslant 2m$.

5. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами $(i; j)$ и добавить по фишке в узлы $(i+1; j)$ и $(i; j+1)$ при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.

а) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.

б) Докажите, что если изначально в узле $(0; 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

6. На плоскости расположены $n > 1$ окружностей радиуса 1, причём известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что существует хотя бы n различных точек пересечения этих окружностей.

7. Можно ли за круглым столом рассадить 12 человек и поставить 28 бутылок на стол так, чтобы между любыми двумя людьми стояла бутылка?